Über Komplexität mathematischer Probleme: der Solvability Complexity Index

J. Ben-Artzi, A. C. Hansen, O. Nevanlinna, M. Seidel

Workshop Mathematik in Forschung und Lehre

September, 2016

Betr. stetige lineare Abbildungen auf $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(l^2)$$

Betr. stetige lineare Abbildungen auf $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(l^2)$$

und suchen das Spektrum

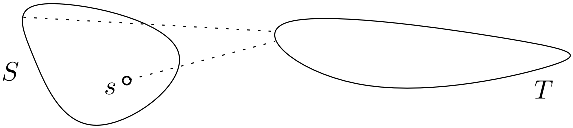
$$\mathrm{sp}(A) := \{z \in \mathbb{C} : A - zI \text{ nicht inv.bar}\}$$

Betr. stetige lineare Abbildungen auf $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(l^2)$$

(C, d_H) - Menge d. kompakten $S, T \subset \mathbb{C}$ mit Hausdorff-Abstand

$$d_H(S,T) := \max\left\{ \max_{s \in S} \operatorname{dist}(s,T), \max_{t \in T} \operatorname{dist}(t,S) \right\}.$$

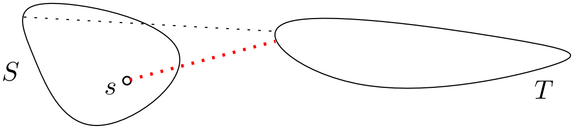


Betr. stetige lineare Abbildungen auf $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(l^2)$$

(C, d_H) - Menge d. kompakten $S, T \subset \mathbb{C}$ mit Hausdorff-Abstand

$$d_H(S, T) := \max\left\{ \max_{s \in S} \mathrm{dist}(s, T), \max_{t \in T} \mathrm{dist}(t, S) \right\}.$$

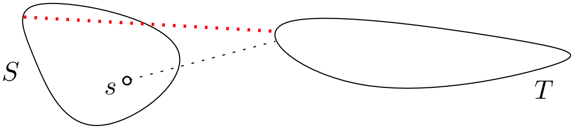


Betr. stetige lineare Abbildungen auf $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(l^2)$$

(C, d_H) - Menge d. kompakten $S, T \subset \mathbb{C}$ mit Hausdorff-Abstand

$$d_H(S,T) := \max\left\{ \max_{s\in S} \mathrm{dist}(s,T), \max_{t \in T} \mathrm{dist}(t,S) \right\}.$$

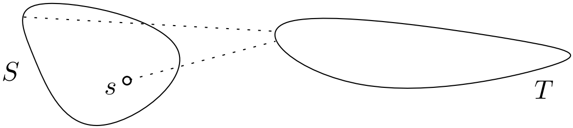


Betr. stetige lineare Abbildungen auf $l^2 = l^2(\mathbb{N}, \mathbb{C})$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \\ \vdots & & & \ddots \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(l^2)$$

$(\mathcal{C}, d_H)$ - Menge d. kompakten $S, T \subset \mathbb{C}$ mit Hausdorff-Abstand

$$d_H(S,T) := \max\left\{ \max_{s \in S} \operatorname{dist}(s,T), \max_{t \in T} \operatorname{dist}(t,S) \right\}.$$



$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Algorithmus $\Gamma : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Γ besteht aus

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ von A

- $\Gamma(A) = \mathrm{sp}(A)$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Algorithmus $\Gamma : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Γ besteht aus

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ von A

- $\Gamma(A) = \mathrm{sp}(A)$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Algorithmus $\Gamma : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Γ besteht aus

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ von A

- $\Gamma(A) = \mathrm{sp}(A)$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Folge von Algorithmen $\Gamma_n : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Jedes Γ_n besteht aus

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^r$ von A

  (r abh. von n)
- $\lim_{n\to\infty} \Gamma_n(A) = \mathrm{sp}(A)$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Familie von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\dots,n_k} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\dots,n_k}$ besteht aus

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ von A

  (r abh. von $n_1, \dots, n_k$)
- $\lim\limits_{n_1\to\infty} \lim\limits_{n_2\to\infty} \cdots \lim\limits_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\dots,n_k}(A) = \mathrm{sp}(A)$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Familie von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\ldots,n_k} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\ldots,n_k}$ besteht aus berechenbare

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ von A

  (r abh. von $n_1, \ldots, n_k$)
- $\lim\limits_{n_1\to\infty} \lim\limits_{n_2\to\infty} \cdots \lim\limits_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\ldots,n_k}(A) = \mathrm{sp}(A)$

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Familie von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\dots,n_k} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\dots,n_k}$ besteht aus berechenbare

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^{r}$ von A

  (r abh. von $n_1, \dots, n_k$)
- $\lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\dots,n_k}(A) = \mathrm{sp}(A)$ Approximationen

$$\mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \qquad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

Berechnen des Spektrums

Suchen Familie von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\ldots,n_k} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\ldots,n_k}$ besteht aus berechenbare

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Matrixeinträgen $(a_{ij})_{i,j=1}^r$ von A

  (r abh. von $n_1, \ldots, n_k$)
- $\lim\limits_{n_1\to\infty} \lim\limits_{n_2\to\infty} \cdots \lim\limits_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\ldots,n_k}(A) = \mathrm{sp}(A)$ Approximationen

Wie viele Limits sind nötig ?

Reboot: Computational problems

Reboot: Computational problems

Computational Problem

$$(\Sigma, \Omega, \mathcal{M}, \Lambda)$$

- $\Sigma : \Omega \to \mathcal{M}$ - *problem function*
- Ω - *primary set* (Menge von interessierenden Objekten)
- $\mathcal{M}$ - metrischer Raum (der Ergebnisse)
- Λ - *evaluation set* (Menge von Funktionen $\lambda : \Omega \to \mathbb{C}$)

Reboot: Computational problems

Computational Problem

$$(\Sigma, \Omega, \mathcal{M}, \Lambda)$$

- $\Sigma : \Omega \to \mathcal{M}$ - *problem function*
- Ω - *primary set* (Menge von interessierenden Objekten)
- $\mathcal{M}$ - metrischer Raum (der Ergebnisse)
- Λ - *evaluation set* (Menge von Funktionen $\lambda : \Omega \to \mathbb{C}$)

$\Sigma = \mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$

$\Lambda = \{\lambda_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ - Matrixeinträge $\lambda_{ij}(A) = a_{ij}$

Reboot: Computational problems

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M}$$

Towers of Algorithms

Definieren Familie/Turm von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\ldots,n_k} : \Omega \to \mathcal{M}$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\ldots,n_k}$ besteht aus

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Evaluationen $f_{ij}(\omega)$ von ω

- $\lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\ldots,n_k}(\omega) = \Sigma(\omega)$

Reboot: Computational problems

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M}$$

Towers of Algorithms

Definieren Familie/Turm von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\dots,n_k} : \Omega \to \mathcal{M}$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\dots,n_k}$ besteht aus berechenbare

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Evaluationen $f_{ij}(\omega)$ von ω

- $\lim_{n_1\to\infty} \lim_{n_2\to\infty} \cdots \lim_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\dots,n_k}(\omega) = \Sigma(\omega)$

Reboot: Computational problems

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M}$$

Towers of Algorithms

Definieren Familie/Turm von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\dots,n_k} : \Omega \to \mathcal{M}$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\dots,n_k}$ besteht aus berechenbare

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Evaluationen $f_{ij}(\omega)$ von ω

- $\lim\limits_{n_1\to\infty} \lim\limits_{n_2\to\infty} \cdots \lim\limits_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\dots,n_k}(\omega) = \Sigma(\omega)$ Approximationen

Reboot: Computational problems

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M}$$

Towers of Algorithms

Definieren Familie/Turm von Algorithmen $\Gamma_{n_1,\dots,n_k} : \Omega \to \mathcal{M}$ mit

- Jedes $\Gamma_{n_1,\dots,n_k}$ besteht aus berechenbare

  endlich vielen Operationen auf
  endlich vielen Evaluationen $f_{ij}(\omega)$ von ω

- $\lim\limits_{n_1\to\infty} \lim\limits_{n_2\to\infty} \cdots \lim\limits_{n_k\to\infty} \Gamma_{n_1,\dots,n_k}(\omega) = \Sigma(\omega)$ Approximationen

Der Solvability Complexity Index SCI(Σ) von Σ ist die kleinste Anzahl k an Limits, für die es einen solchen Algorithmenturm gibt.

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Betrachten Entscheidungsprobleme

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M} := \{ja, nein\},$$

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Betrachten Entscheidungsprobleme

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M} := \{ja, nein\},$$

speziell für die Menge aller $0-1-$Folgen

$$\Omega := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \{0,1\}\}$$

Σ_1 Hat (a_i) eine 1?

Σ_2 Hat (a_i) unendlich viele 1en?

Σ_3 Hat $(a_{i,j})$ unendlich viele 1en?

Σ_4 Hat $(a_{i,j})$ eine Spalte mit unendlich vielen 1en?

$\mathrm{SCI}(\Sigma_1) = 1, \quad \mathrm{SCI}(\Sigma_2) = 2, \ldots$

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Betrachten Entscheidungsprobleme

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M} := \{ja, nein\},$$

speziell für die Menge aller $0-1-$Folgen

$$\Omega := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \{0,1\}\}$$

Σ_1 Hat (a_i) eine 1?

Σ_2 Hat (a_i) unendlich viele 1en?

Σ_3 Hat $(a_{i,j})$ unendlich viele 1en?

Σ_4 Hat $(a_{i,j})$ eine Spalte mit unendlich vielen 1en?

$\mathrm{SCI}(\Sigma_1) = 1, \quad \mathrm{SCI}(\Sigma_2) = 2, \ldots$

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Betrachten Entscheidungsprobleme

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M} := \{ja, nein\},$$

speziell für die Menge aller $0-1-$Folgen

$$\Omega := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \{0,1\}\}$$

- Σ_1 Hat (a_i) eine 1?
- Σ_2 Hat (a_i) unendlich viele 1en?
- Σ_3 Hat $(a_{i,j})$ unendlich viele 1en?
- Σ_4 Hat $(a_{i,j})$ eine Spalte mit unendlich vielen 1en?

$\mathrm{SCI}(\Sigma_1) = 1, \quad \mathrm{SCI}(\Sigma_2) = 2, \ldots$

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Betrachten Entscheidungsprobleme

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M} := \{ja, nein\},$$

speziell für die Menge aller $0-1$–Folgen

$$\Omega := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \{0,1\}\}$$

- Σ_1 Hat (a_i) eine 1?
- Σ_2 Hat (a_i) unendlich viele 1en?
- Σ_3 Hat $(a_{i,j})$ unendlich viele 1en?
- Σ_4 Hat $(a_{i,j})$ eine Spalte mit unendlich vielen 1en?

$\mathrm{SCI}(\Sigma_1) = 1, \quad \mathrm{SCI}(\Sigma_2) = 2, \ldots$

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Betrachten Entscheidungsprobleme

$$\Sigma : \Omega \to \mathcal{M} := \{ja, nein\},$$

speziell für die Menge aller $0-1-$Folgen

$$\Omega := \{(a_i)_{i\in\mathbb{N}} : a_i \in \{0,1\}\}$$

Σ_1 Hat (a_i) eine 1?

Σ_2 Hat (a_i) unendlich viele 1en?

Σ_3 Hat $(a_{i,j})$ unendlich viele 1en?

Σ_4 Hat $(a_{i,j})$ eine Spalte mit unendlich vielen 1en?

$\mathrm{SCI}(\Sigma_1) = 1, \quad \mathrm{SCI}(\Sigma_2) = 2, \ldots$

Warm Up: einfache Entscheidungsprobleme

Einbettung "klassischer" Rekursionstheorie

(Gödel, Kleene, Mostowski, Turing, Church)

Lage in der arithmetischen Hierarchie $\hat{=}$ SCI

(Lemma von Shoenfield '59)

Weitere Beispiele

Lösen linearer Gleichungen

Für $A \in G\mathcal{L}(l^2)$, $b \in l^2$ ist $x \in l^2$ mit $Ax = b$ gesucht, d.h.

$$\Sigma : G\mathcal{L}(l^2) \times l^2 \to l^2, \quad (A, b) \mapsto x.$$

(Die Algorithmen Γ. lesen nur endlich viele Einträge von A und b)

Proposition S. '13

Die Lösung x von $Ax = b$ mit $A \in G\mathcal{L}(l^2)$ kann i.A. nicht in einem Limit berechnet werden.

Bem: gilt schon für selbstadjungierte A.

Weitere Beispiele

Lösen linearer Gleichungen

Für $A \in G\mathcal{L}(l^2)$, $b \in l^2$ ist $x \in l^2$ mit $Ax = b$ gesucht, d.h.

$$\Sigma : G\mathcal{L}(l^2) \times l^2 \to l^2, \quad (A, b) \mapsto x.$$

(Die Algorithmen Γ. lesen nur endlich viele Einträge von A und b)

Proposition

S. '13

Die Lösung x von $Ax = b$ mit $A \in G\mathcal{L}(l^2)$ kann i.A. nicht in einem Limit berechnet werden.

Bem: gilt schon für selbstadjungierte A.

Weitere Beispiele

Lösen linearer Gleichungen

Für $A \in G\mathcal{L}(l^2)$, $b \in l^2$ ist $x \in l^2$ mit $Ax = b$ gesucht, d.h.

$$\Sigma : G\mathcal{L}(l^2) \times l^2 \to l^2, \quad (A, b) \mapsto x.$$

(Die Algorithmen $\Gamma_\cdot$ lesen nur endlich viele Einträge von A und b)

Proposition

S. '13

Die Lösung x von $Ax = b$ mit $A \in G\mathcal{L}(l^2)$ kann i.A. nicht in einem Limit berechnet werden.

Bem: gilt schon für selbstadjungierte A.

Weitere Beispiele

Lösen linearer Gleichungen

Für $A \in G\mathcal{L}(l^2)$, $b \in l^2$ ist $x \in l^2$ mit $Ax = b$ gesucht, d.h.

$$\Sigma : G\mathcal{L}(l^2) \times l^2 \to l^2, \quad (A, b) \mapsto x.$$

(Die Algorithmen Γ. lesen nur endlich viele Einträge von A und b)

Theorem

Die Lösung x von $Ax = b$ mit $A \in G\mathcal{L}(l^2)$ kann in zwei Limits berechnet werden.

Idee: Moore-Penrose-Inversion für rechteckige Finite Sections

$$\Gamma_{m,n}(A, b) := (P_m A^* P_n A P_m)^{-1} P_m A^* P_n b.$$

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $\quad = \infty$ für $k \geq 6$

  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k

  (durch clevere Startnäherungen)

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $\quad = \infty$ für $k \geq 6$

  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k

  (durch clevere Startnäherungen)

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $\quad = \infty$ für $k \geq 6$

  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k

  (durch clevere Startnäherungen)

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $\quad = \infty$ für $k \geq 6$
  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k
  (durch clevere Startnäherungen)

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $= \infty$ für $k \geq 6$

  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k

  (durch clevere Startnäherungen)

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $\quad = \infty$ für $k \geq 6$

  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k

  (durch clevere Startnäherungen)

Weitere Beispiele

Nullstellen von Polynomen

Für Polynom $p \in \mathcal{P}_k$ $k$ten Grades ist die Nullstellenmenge gesucht, d.h.

$$\Sigma : \mathcal{P}_k \to (C, d_H), \quad p \mapsto \{z \in \mathbb{C} : p(z) = 0\}.$$

- Abel-Ruffini, Galois, Newton's Method
- Doyle, McMullen '80s: $SCI = 1$ für $k = 2, 3$;
  $< \infty$ für $k = 4, 5$; $= \infty$ für $k \geq 6$

  ((fast) beliebige Startnäherungen)
- Hubbard, Schleicher, Sutherland 2000: $SCI = 1$ für alle k

  (durch clevere Startnäherungen)

1. Einführung: Algorithmentürme und Komplexität
   - Berechnung von Spektren
   - Computational problems: pur und rein
   - Weitere Beispiele

2. Untere und obere Schranken beim Spektrum
   - Zwei Beispiele -> SCI(sp $\geq$ 2)
   - Ein Turm für selbstadjungierte Operatoren
   - Der Kreis schließt sich

Zurück zu Operatorspektren

$$\Sigma = \mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$$

$\Lambda = \{\lambda_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ - Matrixeinträge $\lambda_{ij}(A) = a_{ij}$

Zurück zu Operatorspektren

$$\Sigma = \mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$$

$\Lambda = \{\lambda_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ - Matrixeinträge $\lambda_{ij}(A) = a_{ij}$

Theorem Hansen '08

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}) \leq 3.$$

A. C. Hansen, On the solvability complexity index, the n-pseudospectrum and approximations of spectra of operators, J. Amer. Math. Soc. ***24*** *(2011), 81-124.*

Zurück zu Operatorspektren

$$\Sigma = \mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$$

$\Lambda = \{\lambda_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ - Matrixeinträge $\lambda_{ij}(A) = a_{ij}$

Theorem Hansen '08

$$\mathrm{SCI(sp)} \leq 3.$$

A. C. Hansen, On the solvability complexity index, the n-pseudospectrum and approximations of spectra of operators, J. Amer. Math. Soc. ***24*** *(2011), 81-124.*

Ist er 2 ?

Zurück zu Operatorspektren

$$\Sigma = \mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$$

$\Lambda = \{\lambda_{ij} : i, j \in \mathbb{N}\}$ - Matrixeinträge $\lambda_{ij}(A) = a_{ij}$

Theorem Hansen '08

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}) \leq 3.$$

A. C. Hansen, On the solvability complexity index, the n-pseudospectrum and approximations of spectra of operators, J. Amer. Math. Soc. ***24*** *(2011), 81-124.*

Ist er 2 ?

oder sogar 1 ?

Zurück zu Operatorspektren

$$\Sigma = \mathrm{sp} : \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H)$$

$\Lambda = \{\lambda_{ij} : i,j \in \mathbb{N}\}$ - Matrixeinträge $\lambda_{ij}(A) = a_{ij}$

Theorem Hansen '08

$$\mathrm{SCI(sp)} \leq 3.$$

A. C. Hansen, On the solvability complexity index, the n-pseudospectrum and approximations of spectra of operators, J. Amer. Math. Soc. ***24*** *(2011), 81-124.*

Ist er 2 ?

oder sogar 1 ?

Wird es besser für speziellere Klassen, z.B. für selbstadjungierte oder Band-Operatoren ?

Angenommen SCI(sp) $= 1$ und $\{\Gamma_m : m \in \mathbb{N}\}$ tut's.

Betrachten Block-diagonal-matrizen

$$A := \operatorname{diag}\{B_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_3}, \ldots\}$$

mit Blöcken

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\operatorname{sp}(A) = \{0, 2\}$$

Angenommen SCI(sp) $= 1$ und $\{\Gamma_m : m \in \mathbb{N}\}$ tut's.

Betrachten Block-diagonal-matrizen

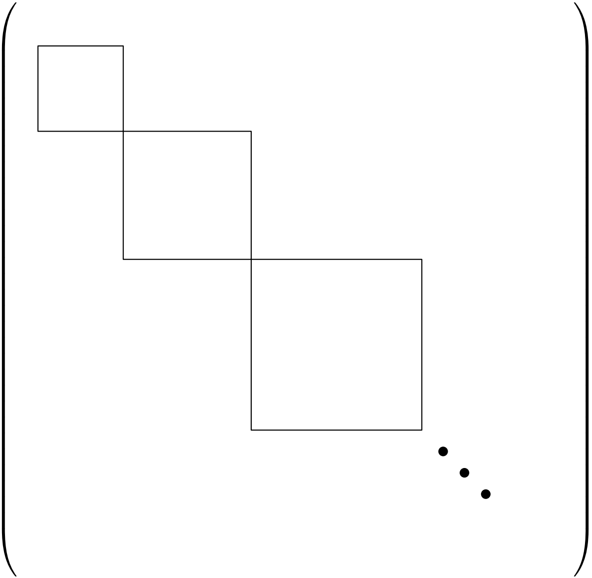
$$A := \operatorname{diag}\{B_{n_1}, B_{n_2}, B_{n_3}, \ldots\}$$

mit Blöcken

$$B_n = \begin{pmatrix} 1 & & & & 1 \\ & 0 & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & 0 & \\ 1 & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{n \times n}$$

$$\operatorname{sp}(A) = \{0, 2\}$$

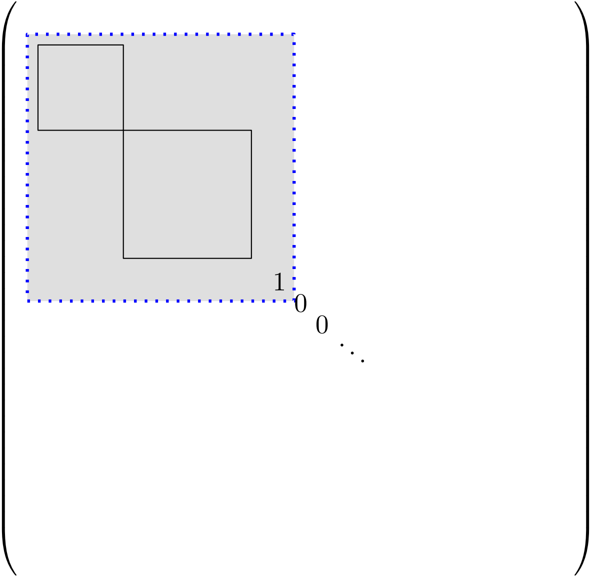
sp



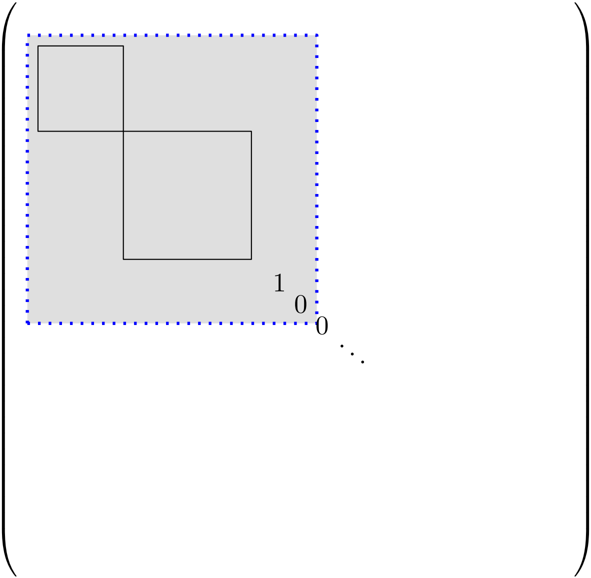
$$= \{0, 2\}$$

$$\text{sp}\begin{pmatrix} \square & & & & & \\ & \square & & & & \\ & & 1 & & & \\ & & & 0 & & \\ & & & & 0 & \\ & & & & & \ddots \end{pmatrix} = \{0, 1, 2\}$$

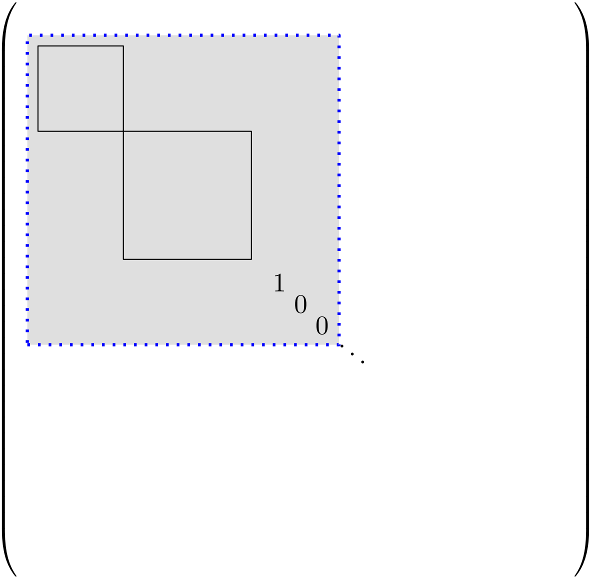
Γ_m



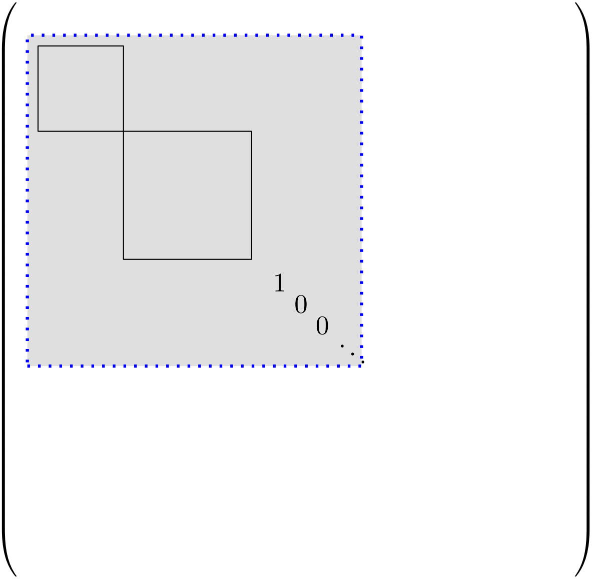
Γ_m



Γ_m

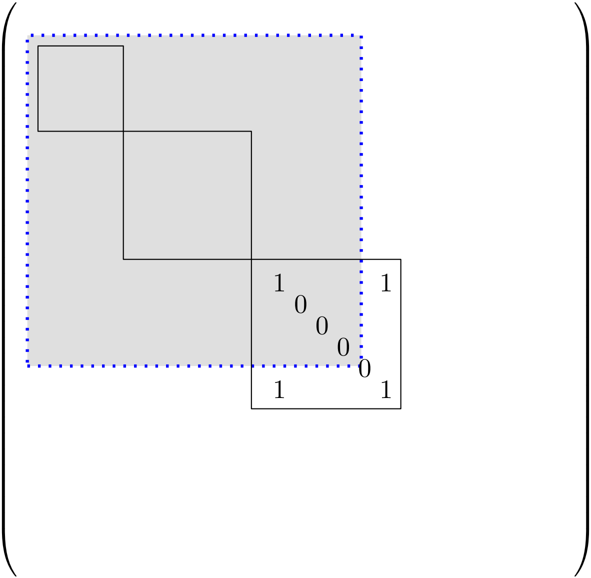


Γ_m



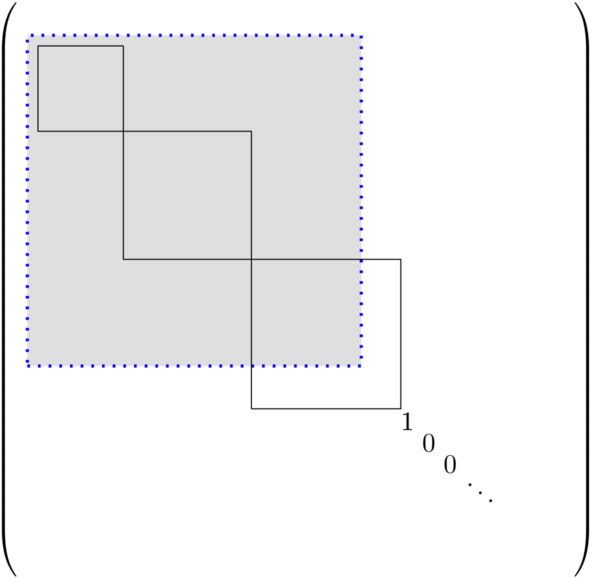
$\cap\ U_{\frac{1}{2}}(1) \neq \emptyset$

Γ_m



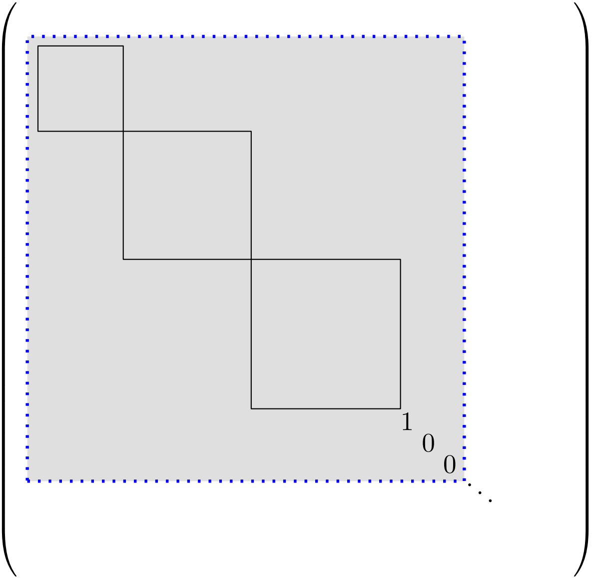
$\cap\ U_{\frac{1}{2}}(1) \neq \emptyset$

Γ_m



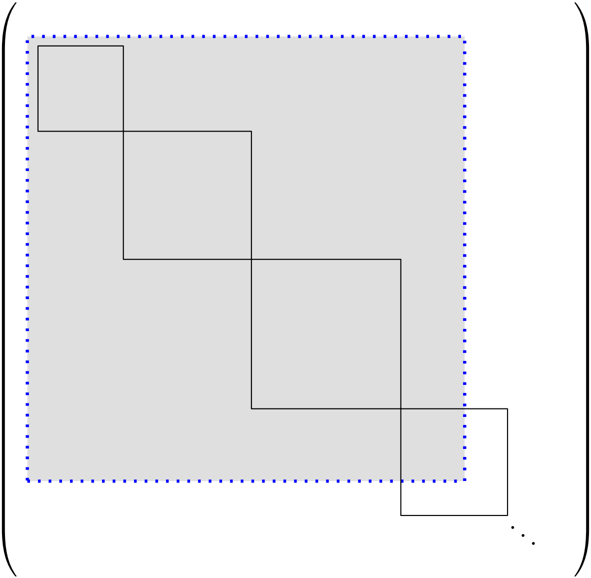
$\cap\ U_{\frac{1}{2}}(1) \neq \emptyset$

Γ_m



$\cap\ U_{\frac{1}{2}}(1) \neq \emptyset$

Γ_m



$\not\to \{0, 2\}$

Proposition Ben-Artzi, Hansen, S. '12

$$\mathrm{sp}: \ \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \quad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

hat

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}) \geq 2.$$

Proposition — Ben-Artzi, Hansen, S. '12

$$\mathrm{sp}: \ \mathcal{L}(l^2) \to (C, d_H), \quad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

hat

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}) \geq 2.$$

Proposition - selbstadjungierte Operatoren — Ben-Artzi, Hansen, S. '12

$$\mathrm{sp}^{sa}: \ \{A \in \mathcal{L}(l^2) : A \text{ s.a.}\} \to (C, d_H), \quad A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

hat

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}^{sa}) \geq 2.$$

Band-Operatoren

Der Schönheit halber betrachten wir hier mal $l^2(\mathbb{Z})$
und die Shift-Operatoren

$$V = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & 1 & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

Band-Operatoren

Der Schönheit halber betrachten wir hier mal $l^2(\mathbb{Z})$ und die gewichteten Shift-Operatoren

$$V_J = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & \frac{1}{i} & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & 1 & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $\frac{1}{i}$ an der $i$ten Stelle für jedes $i \in J$

$$\mathrm{sp}(V_J) = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \qquad (|J| < \infty)$$

Band-Operatoren

Der Schönheit halber betrachten wir hier mal $l^2(\mathbb{Z})$
und die gewichteten Shift-Operatoren

$$V_J = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & \frac{1}{i} & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & \frac{1}{i+2} & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & \ddots \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $\frac{1}{i}$ an der $i$ten Stelle für jedes $i \in J$

$$\mathrm{sp}(V_J) = \mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} \qquad (|J| < \infty)$$

Band-Operatoren

Der Schönheit halber betrachten wir hier mal $l^2(\mathbb{Z})$
und die gewichteten Shift-Operatoren

$$V_J = \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & & & & & & & \\ & 0 & 1 & & & & & & \\ & & 0 & \color{red}{\frac{1}{i}} & & & & & \\ & & & 0 & 1 & & & & \\ & & & & 0 & \color{red}{\frac{1}{i+2}} & & & \\ & & & & & 0 & 1 & & \\ & & & & & & 0 & 1 & \\ & & & & & & & 0 & \color{red}{\ddots} \\ & & & & & & & & \ddots \end{pmatrix}$$

mit $\frac{1}{i}$ an der $i$ten Stelle für jedes $i \in J$

$$0 \in \mathrm{sp}(V_J) \qquad (|J| = \infty)$$

Proposition - Band-Operatoren

S. '12

$$\mathrm{sp}^{band} : \{A \in \mathcal{L}(l^2) : A \text{ Bandoperator}\} \to (C, d_H), \ A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

hat

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}^{band}) \geq 2.$$

Proposition - Band-Operatoren

S. '12

$$\mathrm{sp}^{band} : \{A \in \mathcal{L}(l^2) : A \text{ Bandoperator}\} \to (C, d_H), \; A \mapsto \mathrm{sp}(A)$$

hat

$$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}^{band}) \geq 2.$$

$\mathrm{SCI}(\mathrm{sp}^{\cdots})$	band	allgemein
selbstadjungiert		≥ 2
allgemein	≥ 2	2 oder 3

1. Einführung: Algorithmentürme und Komplexität
   - Berechnung von Spektren
   - Computational problems: pur und rein
   - Weitere Beispiele

2. Untere und obere Schranken beim Spektrum
   - Zwei Beispiele -> SCI(sp $\geq$ 2)
   - Ein Turm für selbstadjungierte Operatoren
   - Der Kreis schließt sich

Sei A selbstadjungiert.

$\Rightarrow$

- $\text{sp}(A) \subset \mathbb{R}$
- $\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$ $\quad$ σ_1 - kleinster Singulärwert

Sei A selbstadjungiert.

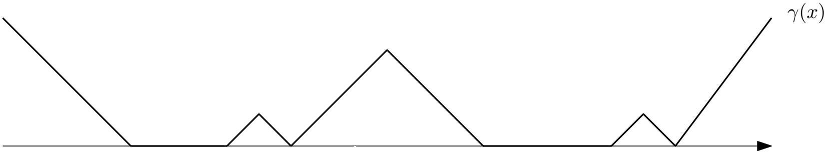
$\Rightarrow$

- $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}$
- $\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$ σ_1 - kleinster Singulärwert

Sei A selbstadjungiert.

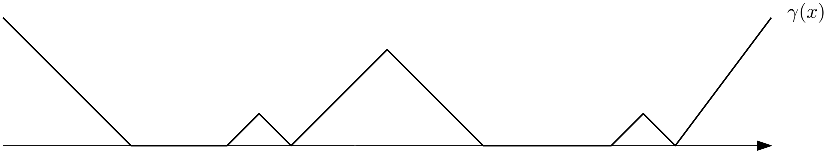
$\Rightarrow$

- $\mathrm{sp}(A) \subset \mathbb{R}$
- $\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$ $\quad$ σ_1 - kleinster Singulärwert
  $= \mathrm{dist}(x, \mathrm{sp}(A))$



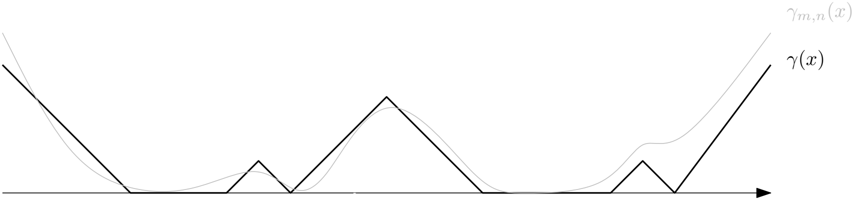
Sei A selbstadjungiert.

$$\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$$



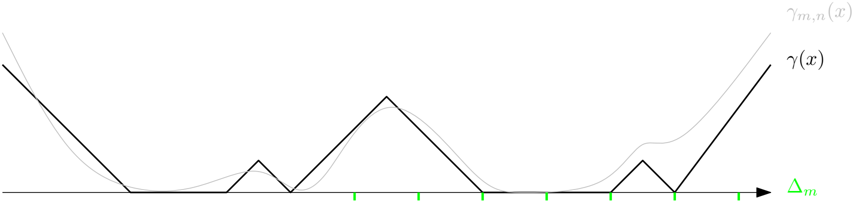
Sei A selbstadjungiert.

$$\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$$
$$\gamma_{m,n}(x) = \sigma_1(P_n(A - xI)P_m)$$



Sei A selbstadjungiert.

$$\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$$
$$\gamma_{m,n}(x) = \sigma_1(P_n(A - xI)P_m)$$
$$\Delta_m = \{s/m : s = -m^2, \ldots, m^2\}$$

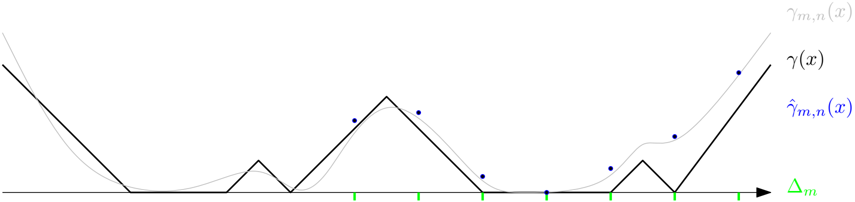


Sei A selbstadjungiert.

$$\gamma(x) = \sigma_1(A - xI)$$
$$\gamma_{m,n}(x) = \sigma_1(P_n(A - xI)P_m)$$
$$\Delta_m = \{s/m : s = -m^2, \dots, m^2\}$$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



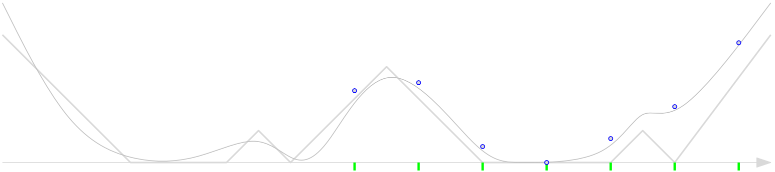
Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



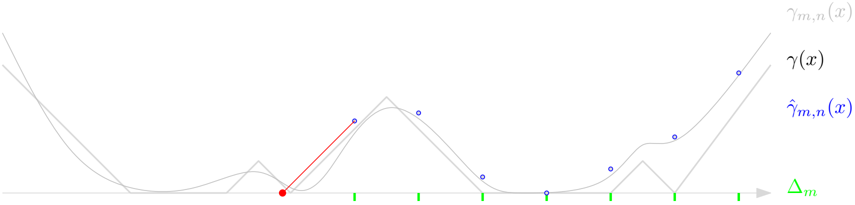
Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



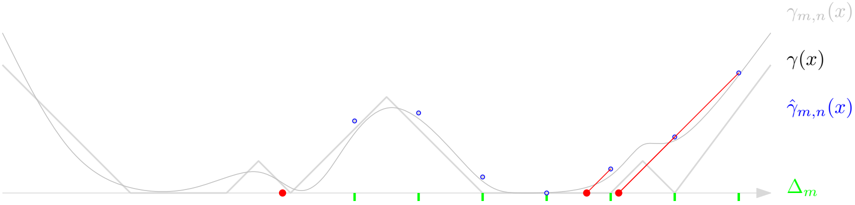
Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



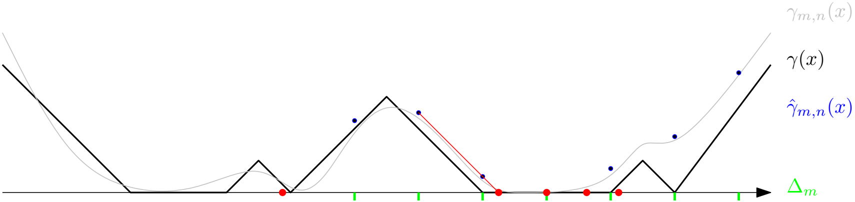
Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



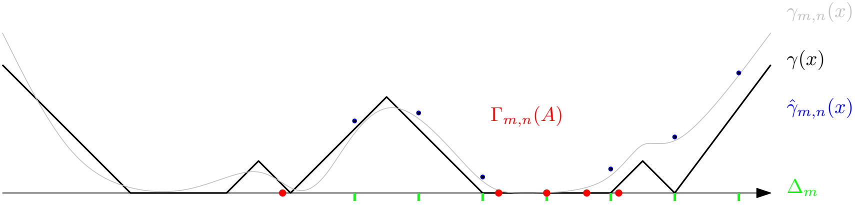
Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



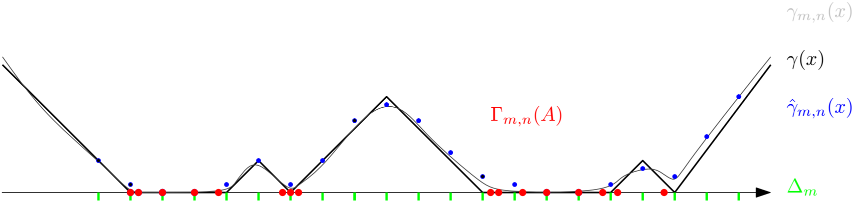
Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$



Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$

Theorem - s.a. Operatoren S. '13

$$\lim_{m\to\infty} \lim_{n\to\infty} \Gamma_{m,n}(A) = \mathrm{sp}(A)$$

folglich

$$SCI(\mathrm{sp}^{sa}) = 2.$$

Sei A selbstadjungiert.

Konstruieren $\Gamma_{m,n}(A)$ wie folgt:

- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}(x) \geq 1$: —
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x wächst: $x - \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$
- Falls $\hat{\gamma}_{m,n}$ in x fällt: $x + \hat{\gamma}_{m,n}(x) \longmapsto \Gamma_{m,n}(A)$

für $x \in \Delta_m$

$$\hat{\gamma}_{m,n}(x) = \min\{k/m : k \in \mathbb{N}, \sigma_1(P_n(A - xI)P_m) \leq k/m\}$$

Theorem - s.a. Band-Operatoren S. '13

$$\lim_{m\to\infty} \Gamma_{m,m+b}(A) = \mathrm{sp}(A)$$

folglich

$$SCI(\mathrm{sp}^{sa,band}) = 1.$$

Der Kreis schließt sich

SCI(sp$^{\cdots}$)	band	allgemein
selbstadjungiert	1	2
allgemein	≥ 2	2 oder 3

Der Kreis schließt sich

SCI(sp$^{\cdots}$)	band	allgemein
selbstadjungiert	1	2
allgemein	2	2 oder 3

Der Kreis schließt sich

SCI(sp$^{\cdots}$)	band	allgemein
selbstadjungiert	1	2
allgemein	2	3

Umweg über Entscheidungsproblem: Nevanlinna; S. '14

$$\Sigma : \{a_{i,j}\}_{i,j\in\mathbb{Z}} \mapsto \left(\exists D \forall j \left(\left(\forall i \sum_{k=-i}^{i} a_{k,j} < D\right) \vee \left(\forall R \exists i \sum_{k=0}^{i} a_{k,j} > R \wedge \sum_{k=-i}^{0} a_{k,j} > R\right)\right)\right)$$

... heavy

$$\Sigma : \mathcal{L}(l^2) \to \{ja, nein\}, \quad A \mapsto (0 \in \operatorname{sp} A)$$

Gehört 0 zu sp A?

$$\Sigma : \mathcal{L}(l^2) \to \{ja, nein\}, \quad A \mapsto (0 \in \operatorname{sp} A)$$ Gehört 0 zu sp A?

Betr. Diagonaloperatoren

$$A = (a_{ij}) = \operatorname{diag}\left\{1, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

$$\Sigma : \mathcal{L}(l^2) \to \{ja, nein\}, \quad A \mapsto (0 \in \text{sp}\, A)$$ Gehört 0 zu sp A?

Betr. Diagonaloperatoren

$$A = (a_{ij}) = \text{diag}\left\{1, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

Offenbar

$$0 \in \text{sp}(A) \quad \Leftrightarrow \quad a_{ii} \to_{i\to\infty} 0$$

$$\Leftrightarrow \quad (b_i) = \left(\frac{1}{2}(a_{i+1,i+1} - a_{ii})\right) \text{ hat } \infty \text{ viele Einsen}$$

("∞ viele Stufen auf der Diagonalen")

$$\Sigma : \mathcal{L}(l^2) \to \{ja, nein\}, \quad A \mapsto (0 \in \operatorname{sp} A)$$ Gehört 0 zu sp A?

Betr. Diagonaloperatoren

$$A = (a_{ij}) = \operatorname{diag}\left\{1, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

Offenbar

$$\begin{aligned} 0 \in \operatorname{sp}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad a_{ii} \to_{i\to\infty} 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (b_i) = \left(\frac{1}{2}(a_{i+1,i+1} - a_{ii})\right) \text{ hat } \infty \text{ viele Einsen} \end{aligned}$$

("∞ viele Stufen auf der Diagonalen")

$$\Sigma : \mathcal{L}(l^2) \to \{ja, nein\}, \quad A \mapsto (0 \in \text{sp}\, A)$$ Gehört 0 zu sp A?

Betr. Diagonaloperatoren

$$A = (a_{ij}) = \text{diag}\left\{1, \ldots, 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \ldots\right\}$$

Offenbar

$$\begin{aligned} 0 \in \text{sp}(A) \quad &\Leftrightarrow \quad a_{ii} \to_{i\to\infty} 0 \\ &\Leftrightarrow \quad (b_i) = \left(\frac{1}{2}(a_{i+1,i+1} - a_{ii})\right) \text{ hat } \infty \text{ viele Einsen} \end{aligned}$$

("∞ viele Stufen auf der Diagonalen")

$\Rightarrow$ SCI$(\Sigma^{sa,diag}) \geq 2$ obwohl SCI$(\text{sp}^{sa,diag}) = 1$

Über Komplexität mathematischer Probleme: der Solvability Complexity Index

J. Ben-Artzi, A. C. Hansen, O. Nevanlinna, M. Seidel

Workshop Mathematik in Forschung und Lehre

September, 2016