Über das Benfordsche Gesetz der führenden Ziffern

Hans-Jörg Starkloff

TU Bergakademie Freiberg (Sachsen)
Institut für Stochastik

Workshop „Mathematik in Forschung und Lehre“
Pobershau 20.-21.09.2016

Einleitung

- **Inhalt**: Häufigkeitsverteilung der führenden signifikanten Ziffer oder Ziffernfolge in Datensätzen ist oft nicht die Gleichverteilung, sondern die logarithmische Verteilung („Benford-Verteilung").
- Frank Benford: 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- Untersuchung von 20 Datensätzen mit insgesamt 20 229 Zahlen.

  Relative Häufigkeiten in % der führenden Ziffern:

Ziffer d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Daten	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7
$\lg(1+d^{-1})$	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

- **Frage**: Für welche Datensätze gilt die Benford-Verteilung für führende Ziffern und in welchem Sinne bzw. wann kann man sie erwarten.

Einleitung

- **Inhalt**: Häufigkeitsverteilung der führenden signifikanten Ziffer oder Ziffernfolge in Datensätzen ist oft nicht die Gleichverteilung, sondern die logarithmische Verteilung („Benford-Verteilung“).
- Frank Benford: 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- Untersuchung von 20 Datensätzen mit insgesamt 20 229 Zahlen.

  Relative Häufigkeiten in % der führenden Ziffern:

Ziffer d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Daten	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7
$\lg(1 + d^{-1})$	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

- **Frage**: Für welche Datensätze gilt die Benford-Verteilung für führende Ziffern und in welchem Sinne bzw. wann kann man sie erwarten.

Einleitung

- **Inhalt**: Häufigkeitsverteilung der führenden signifikanten Ziffer oder Ziffernfolge in Datensätzen ist oft nicht die Gleichverteilung, sondern die logarithmische Verteilung („Benford-Verteilung").
- Frank Benford: 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- Untersuchung von 20 Datensätzen mit insgesamt 20 229 Zahlen.

  Relative Häufigkeiten in % der führenden Ziffern:

Ziffer d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Daten	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7
$\lg(1 + d^{-1})$	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

- **Frage**: Für welche Datensätze gilt die Benford-Verteilung für führende Ziffern und in welchem Sinne bzw. wann kann man sie erwarten.

Einleitung

- **Inhalt**: Häufigkeitsverteilung der führenden signifikanten Ziffer oder Ziffernfolge in Datensätzen ist oft nicht die Gleichverteilung, sondern die logarithmische Verteilung („Benford-Verteilung").

- Frank Benford: 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.

- Untersuchung von 20 Datensätzen mit insgesamt 20 229 Zahlen.

  Relative Häufigkeiten in % der führenden Ziffern:

Ziffer d	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Daten	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7
$\lg(1+d^{-1})$	30.1	17.6	12.5	9.7	7.9	6.7	5.8	5.1	4.6

- **Frage**: Für welche Datensätze gilt die Benford-Verteilung für führende Ziffern und in welchem Sinne bzw. wann kann man sie erwarten.

Kurzer Überblick über Geschichte

- Simon Newcomb, 1881, Entdeckung.
- Frank Benford, 1938, Wiederentdeckung, Wecken der Aufmerksamkeit.
- Ab ca. 1960-er Jahre: verstärkte mathematische Hinwendung, Begründungsversuche.
- Theodore P. Hill, 1995, statistische Begründung.
- Ab ca. 1990-er Jahre: Beginn der Nutzung für außermathematische Anwendungen.

Kurzer Überblick über Geschichte

- Simon Newcomb, 1881, Entdeckung.
- Frank Benford, 1938, Wiederentdeckung, Wecken der Aufmerksamkeit.
- Ab ca. 1960-er Jahre: verstärkte mathematische Hinwendung, Begründungsversuche.
- Theodore P. Hill, 1995, statistische Begründung.
- Ab ca. 1990-er Jahre: Beginn der Nutzung für außermathematische Anwendungen.

Kurzer Überblick über Geschichte

- Simon Newcomb, 1881, Entdeckung.
- Frank Benford, 1938, Wiederentdeckung, Wecken der Aufmerksamkeit.
- Ab ca. 1960-er Jahre: verstärkte mathematische Hinwendung, Begründungsversuche.
- Theodore P. Hill, 1995, statistische Begründung.
- Ab ca. 1990-er Jahre: Beginn der Nutzung für außermathematische Anwendungen.

Kurzer Überblick über Geschichte

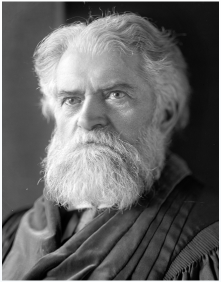
- Simon Newcomb, 1881, Entdeckung.
- Frank Benford, 1938, Wiederentdeckung, Wecken der Aufmerksamkeit.
- Ab ca. 1960-er Jahre: verstärkte mathematische Hinwendung, Begründungsversuche.
- Theodore P. Hill, 1995, statistische Begründung.
- Ab ca. 1990-er Jahre: Beginn der Nutzung für außermathematische Anwendungen.

Kurzer Überblick über Geschichte

- Simon Newcomb, 1881, Entdeckung.
- Frank Benford, 1938, Wiederentdeckung, Wecken der Aufmerksamkeit.
- Ab ca. 1960-er Jahre: verstärkte mathematische Hinwendung, Begründungsversuche.
- Theodore P. Hill, 1995, statistische Begründung.
- Ab ca. 1990-er Jahre: Beginn der Nutzung für außermathematische Anwendungen.

Simon Newcomb (1835-1909)

- Kanandisch-amerikanischer Astronom und Mathematiker.
- 1881, *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers*, American Journal of Mathematics
  - "That the ten digits do not occur with equal frequency must be evident to any one making much use of logarithmic tables, and noticing how much faster the first pages wear out than the last ones. . . ."
    Heuristische Überlegungen führen auf eine

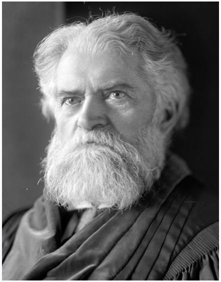


Quelle: Wikipedia

Quelle: Hungerbühler (2007)

Simon Newcomb (1835-1909)

- Kanandisch-amerikanischer Astronom und Mathematiker.
- 1881, *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers*, American Journal of Mathematics
  - "That the ten digits do not occur with equal frequency must be evident to any one making much use of logarithmic tables, and noticing how much faster the first pages wear out than the last ones. ..."
  - Heuristische Überlegungen führen auf eine genauere Charakterisierung.
    "The law of probability of the occurence of numbers is such that all mantissae of their logarithms are equally probable."

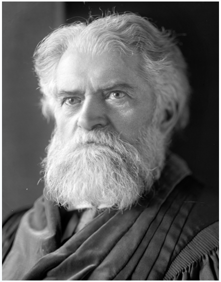


Quelle: Wikipedia

Quelle: Hungerbühler (2007)

Simon Newcomb (1835-1909)

- Kanandisch-amerikanischer Astronom und Mathematiker.
- 1881, *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers*, American Journal of Mathematics
  - "That the ten digits do not occur with equal frequency must be evident to any one making much use of logarithmic tables, and noticing how much faster the first pages wear out than the last ones. ..."
  - Heuristische Überlegungen führen auf eine genauere Charakterisierung.
    "The law of probability of the occurence of numbers is such that all mantissae of their logarithms are equally probable."

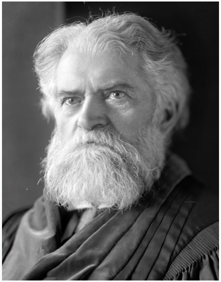


Quelle: Wikipedia

Quelle: Hungerbühler (2007)

Simon Newcomb (1835-1909)

- Kanandisch-amerikanischer Astronom und Mathematiker.
- 1881, *Note on the Frequency of Use of the Different Digits in Natural Numbers*, American Journal of Mathematics
  - "That the ten digits do not occur with equal frequency must be evident to any one making much use of logarithmic tables, and noticing how much faster the first pages wear out than the last ones. ..."
  - Heuristische Überlegungen führen auf eine genauere Charakterisierung.
    "The law of probability of the occurence of numbers is such that all mantissae of their logarithms are equally probable."



Quelle: Wikipedia

Quelle: Hungerbühler (2007)

Frank Benford (1883-1948) I

- Amerikanischer Elektroingenieur und Physiker, arbeitete 1910-1948 bei General Electric in der Forschung.
- 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- "It has been observed that the pages of a much used table of common logarithms show evidence of a selective use of the natural numbers. ..."

- Quelle: www.s9.com/Biography/benford-frank/

Frank Benford (1883-1948) I

- Amerikanischer Elektroingenieur und Physiker, arbeitete 1910-1948 bei General Electric in der Forschung.
- 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- "It has been observed that the pages of a much used table of common logarithms show evidence of a selective use of the natural numbers. . . ."

- Quelle: www.s9.com/Biography/benford-frank/

Frank Benford (1883-1948) I

- Amerikanischer Elektroingenieur und Physiker, arbeitete 1910-1948 bei General Electric in der Forschung.
- 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- "It has been observed that the pages of a much used table of common logarithms show evidence of a selective use of the natural numbers. . . ."

- Quelle: `www.s9.com/Biography/benford-frank/`

Frank Benford (1883-1948) I

- Amerikanischer Elektroingenieur und Physiker, arbeitete 1910-1948 bei General Electric in der Forschung.
- 1938, *The Law of Anomalous Numbers*, Proceedings of the American Philosophical Society.
- "It has been observed that the pages of a much used table of common logarithms show evidence of a selective use of the natural numbers. ..."

- Quelle: `www.s9.com/Biography/benford-frank/`

Frank Benford (1883-1948) II

Percentage of Times the Natural Numbers 1 to 9 are Used as First Digits in Numbers, as Determined by 20,229 Observations

Group	Title	First Digit 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Count
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Spec. Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	$n^{-1}, \sqrt{n}, \cdots$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	*Digest*	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Black Body	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	$n^1, n^2 \cdots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
	Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
	Probable Error	±0.8	±0.4	±0.4	±0.3	±0.2	±0.2	±0.2	±0.2	±0.3	—

Quelle: Hungerbühler (2007).

Signifikante Ziffern

Geg.: $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

- Erste signifikante Dezimalziffer von x, $D_1(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ mit $10^k j \leq x < 10^k(j+1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- Für $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ induktiv Definition der $m-$ten signifikanten Dezimalziffer von x, $D_m(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ mit

$$10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j \right) \leq x < 10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j + 1 \right)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

- **Bsp.:** $D_1(\pi) = D_1(10\pi) = 3\,, D_2(\pi) = 1\,, D_3(\pi) = 4\,.$
- Analog für andere Basen $b \neq 10, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Definition der $m-$ten signifikanten Ziffer $D_m^{(b)}(x)$.

Signifikante Ziffern

Geg.: $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

- Erste signifikante Dezimalziffer von x, $D_1(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ mit $10^k j \leq x < 10^k(j+1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- Für $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ induktiv Definition der $m-$ten signifikanten Dezimalziffer von x, $D_m(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ mit

$$10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j \right) \leq x < 10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j + 1 \right)$$

für ein $k \in \mathbb{Z}$.

- **Bsp.:** $D_1(\pi) = D_1(10\pi) = 3\,, D_2(\pi) = 1\,, D_3(\pi) = 4\,.$
- Analog für andere Basen $b \neq 10, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Definition der $m-$ten signifikanten Ziffer $D_m^{(b)}(x)$.

Signifikante Ziffern

Geg.: $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

- Erste signifikante Dezimalziffer von x, $D_1(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ mit $10^k j \leq x < 10^k(j+1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- Für $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ induktiv Definition der $m-$ten signifikanten Dezimalziffer von x, $D_m(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ mit

$$10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j \right) \leq x < 10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j + 1 \right)$$

  für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- **Bsp.:** $D_1(\pi) = D_1(10\pi) = 3\,, D_2(\pi) = 1\,, D_3(\pi) = 4\,.$
- Analog für andere Basen $b \neq 10, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Definition der $m-$ten signifikanten Ziffer $D_m^{(b)}(x)$.

Signifikante Ziffern

Geg.: $x \in \mathbb{R}^+ = (0, \infty)$.

- Erste signifikante Dezimalziffer von x, $D_1(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{1, 2, \ldots, 9\}$ mit $10^k j \leq x < 10^k (j+1)$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- Für $m \geq 2, m \in \mathbb{N}$ induktiv Definition der $m-$ten signifikanten Dezimalziffer von x, $D_m(x)$: eindeutig bestimmte ganze Zahl $j \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}$ mit

$$10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j \right) \leq x < 10^k \left(\sum_{i=1}^{m-1} D_i(x) 10^{m-i} + j + 1 \right)$$

  für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- **Bsp.:** $D_1(\pi) = D_1(10\pi) = 3\,, D_2(\pi) = 1\,, D_3(\pi) = 4\,.$
- Analog für andere Basen $b \neq 10, b \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Definition der $m-$ten signifikanten Ziffer $D_m^{(b)}(x)\,.$

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \ \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z} \ : \ S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ : S(S(x)) = S(x)$.
- **Explizit:** $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ : \ S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ \ : \ S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z} \ : \ D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.

Bem.: Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z}: \; S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z} : \; D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.

Bem.: Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \ \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, k \in \mathbb{Z} \ : \ S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \ : \ S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \ : \ S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, m \in \mathbb{Z} \ : \ D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.

Bem.: Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \ \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z} : \ S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \ S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z} : \ D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.

Bem.: Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z}: \; S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z} : \; D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.
- **Bem.:** Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \mathbb{R}^+ \to [1,10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1,10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, k \in \mathbb{Z}: \; S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall\, x \in \mathbb{R}^+, \forall\, m \in \mathbb{Z}: \; D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.
- **Bem.:** Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$: $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z}: \; S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z}: \; D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.
- **Bem.:** Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Signifikante

- (Dezimale) Signifikantenfunktion $S: \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$:
  $S(x) =$ die eindeutig bestimmte reelle Zahl $t \in [1, 10)$ mit $x = 10^k \cdot t$ für ein $k \in \mathbb{Z}$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall k \in \mathbb{Z}: \; S(10^k x) = S(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : S(S(x)) = S(x)$.
- Explizit: $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = 10^{\lg(x) - \lfloor \lg(x) \rfloor}$
- $\forall x \in \mathbb{R}^+ : \; S(x) = \sum_{m \in \mathbb{N}} 10^{1-m} D_m(x)$.
- $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall m \in \mathbb{Z} : \; D_m(x) = \lfloor 10^{m-1} S(x) \rfloor - 10 \lfloor 10^{m-2} S(x) \rfloor$.
- **Bsp.:** $S(\pi) = S(10\pi) = 3.1415\ldots$.
- **Bem.:** Bez. auch Mantisse, mitunter Wertebereich $[0.1, 1)$.

Informelle Formulierungen

- Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffer:
  $\forall\, d_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \;:\quad \mathbf{Prob}(D_1 = d_1) = \lg(1 + d_1^{-1})\,.$
- Allgemeines (starkes) Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffern:

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\ d_1 \in \{1,2,\ldots,9\},\ d_2,\ldots,d_m \in \{0,1,\ldots,9\}\ :$$
$$\mathbf{Prob}((D_1,D_2,\ldots,D_m) = (d_1,d_2,\ldots,d_m)) = \lg\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right).$$

- Benfords Gesetz für Signifikantenfunktion:
  $\forall\, t \in [1,10) \;:\; \mathbf{Prob}(S \le t) = \lg(t)\,.$
- **Problem :** Wahrscheinlichkeitsmodellierung bzw. Bedeutung von **Prob** .

Informelle Formulierungen

- Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffer:
  $\forall\, d_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \;:\quad \mathbf{Prob}(D_1 = d_1) = \lg(1 + d_1^{-1})\,.$
- Allgemeines (starkes) Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffern:

$$\forall\, m \in \mathbb{N},\; d_1 \in \{1,2,\ldots,9\},\; d_2,\ldots,d_m \in \{0,1,\ldots,9\} \;:$$
$$\mathbf{Prob}((D_1, D_2, \ldots, D_m) = (d_1, d_2, \ldots, d_m)) = \lg\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right)\,.$$

- Benfords Gesetz für Signifikantenfunktion:
  $\forall\, t \in [1,10) \;:\; \mathbf{Prob}(S \le t) = \lg(t)\,.$
- **Problem :** Wahrscheinlichkeitsmodellierung bzw. Bedeutung von **Prob** .

Informelle Formulierungen

- Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffer:
  $\forall\, d_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\} \;:\quad \textbf{Prob}(D_1 = d_1) = \lg(1 + d_1^{-1})\,.$
- Allgemeines (starkes) Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffern:

$$\forall\, m \in \mathbb{N}\,,\; d_1 \in \{1,2,\ldots,9\}\,,\; d_2,\ldots,d_m \in \{0,1,\ldots,9\} \;:$$
$$\textbf{Prob}((D_1, D_2, \ldots, D_m) = (d_1, d_2, \ldots, d_m)) = \lg\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right)\,.$$

- Benfords Gesetz für Signifikantenfunktion:
  $\forall\, t \in [1,10) \;:\; \textbf{Prob}(S \le t) = \lg(t)\,.$
- **Problem :** Wahrscheinlichkeitsmodellierung bzw. Bedeutung von **Prob** .

Informelle Formulierungen

- Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffer:
  $\forall\, d_1 \in \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\ :\quad \mathbf{Prob}(D_1 = d_1) = \lg(1 + d_1^{-1})\,.$
- Allgemeines (starkes) Benfords Gesetz der ersten signifikanten Ziffern:
  $$\forall\, m \in \mathbb{N}\,,\ d_1 \in \{1,2,\ldots,9\}\,,\ d_2,\ldots,d_m \in \{0,1,\ldots,9\}\ :$$
  $$\mathbf{Prob}((D_1,D_2,\ldots,D_m) = (d_1,d_2,\ldots,d_m)) = \lg\left(1 + \left(\sum_{j=1}^{m} 10^{m-j} d_j\right)^{-1}\right)\,.$$
- Benfords Gesetz für Signifikantenfunktion:
  $\forall\, t \in [1,10)\ :\ \mathbf{Prob}(S \le t) = \lg(t)\,.$
- **Problem :** Wahrscheinlichkeitsmodellierung bzw. Bedeutung von **Prob** .

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}, j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A = \cup_{k \in \mathbb{Z}} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0 , A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N} , A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z} , A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}, j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; A = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall a > 0, A \in \mathcal{S} : aA \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; A = \cup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0, A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; A = \cup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0, A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; A = \cup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0, A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}, j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; A = \cup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0, A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \ldots, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \;\Leftrightarrow\; A = \cup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0$, $A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}$, $A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}$, $A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$

- Für Wahrscheinlichkeitsverteilung ist hier die Borelsche $\sigma-$Algebra, d.h. $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, nicht geeignet.
- Geeignet ist die Signifikanten$-\sigma-$Algebra $\mathcal{S}$: die $\sigma-$Algebra, die von der Signifikantenfunktion $S : \mathbb{R}^+ \to [1, 10)$ bzw. von allen signifikanten Ziffernfunktionen $D_j : \mathbb{R}^+ \to \{0, 1, \dots, 9\}$, $j \in \mathbb{N}$, erzeugt wird.
- **Einige Eigenschaften:**
  - $A \in \mathcal{S} \Leftrightarrow A = \cup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k B$ mit $B \in \mathcal{B}([1, 10))$.
  - Jede nichtleere Menge in $\mathcal{S}$ ist unendlich und besitzt Häufungspunkte in 0 und ∞.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter Multiplikation mit Skalaren: $\forall \alpha > 0, A \in \mathcal{S} : \alpha A \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist abgeschlossen unter ganzzahligen Wurzeln: $\forall n \in \mathbb{N}, A \in \mathcal{S} : A^{1/n} \in \mathcal{S}$.
  - $\mathcal{S}$ ist selbstähnlich bezüglich der Potenzen von 10: $\forall k \in \mathbb{Z}, A \in \mathcal{S} : 10^k A = A$.

Skaleninvarianz

- **Definition**
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ heißt skaleninvariant, falls $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\alpha A)$ für beliebige $A \in \mathcal{S}$ und $\alpha > 0$ gilt.

- **Bemerkung**
  Auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ gibt es keine skaleninvariante Wahrscheinlichkeitsmaße.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ ist genau dann skaleninvariant, falls

$$\forall\, t \in [1, 10) \,:\, \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k \cdot [1, t) \right) = \lg(t)$$

  gilt, d.h. $\mathbf{P}$ die Benford-Verteilung $\mathbf{P}_B$ ist.

Skaleninvarianz

- **Definition**
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ heißt skaleninvariant, falls $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\alpha A)$ für beliebige $A \in \mathcal{S}$ und $\alpha > 0$ gilt.

- **Bemerkung**
  Auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ gibt es keine skaleninvariante Wahrscheinlichkeitsmaße.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ ist genau dann skaleninvariant, falls

$$\forall\, t \in [1,10) \;:\; \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k \cdot [1,t) \right) = \lg(t)$$

  gilt, d.h. $\mathbf{P}$ die Benford-Verteilung $\mathbf{P}_B$ ist.

Skaleninvarianz

- **Definition**
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ heißt skaleninvariant, falls $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(\alpha A)$ für beliebige $A \in \mathcal{S}$ und $\alpha > 0$ gilt.

- **Bemerkung**
  Auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$ gibt es keine skaleninvariante Wahrscheinlichkeitsmaße.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ ist genau dann skaleninvariant, falls

$$\forall\, t \in [1, 10) \,:\, \mathbf{P}\left(\bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k \cdot [1, t)\right) = \lg(t)$$

  gilt, d.h. $\mathbf{P}$ die Benford-Verteilung $\mathbf{P}_B$ ist.

Baseninvarianz I

- **Definition**
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ heißt baseninvariant, falls $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A^{1/n})$ für beliebige $A \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- **Hintergrund z.B.**
  $$\{x \in \mathbb{R}^+ : D_1^{(10)}(x) = 1\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 100^k \cdot [1,2) \cup \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 100^k \cdot [10,20)\,.$$

- DIRAC-Maß δ_1 auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$: $\delta_1(A) = 1$ falls $A_1 \subseteq A$ und sonst 0 mit
  $$A_1 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k \cdot \{1\}\,.$$

Baseninvarianz I

- **Definition**
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ heißt baseninvariant, falls $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A^{1/n})$ für beliebige $A \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- **Hintergrund z.B.**

$$\{x \in \mathbb{R}^+ : D_1^{(10)}(x) = 1\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 100^k \cdot [1,2) \cup \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 100^k \cdot [10,20)\,.$$

- DIRAC-Maß δ_1 auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$: $\delta_1(A) = 1$ falls $A_1 \subseteq A$ und sonst 0 mit

$$A_1 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k \cdot \{1\}\,.$$

Baseninvarianz I

- **Definition**
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ heißt baseninvariant, falls $\mathbf{P}(A) = \mathbf{P}(A^{1/n})$ für beliebige $A \in \mathcal{S}$ und $n \in \mathbb{N}$ gilt.

- **Hintergrund z.B.**

$$\{x \in \mathbb{R}^+ : D_1^{(10)}(x) = 1\} = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 100^k \cdot [1, 2) \cup \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 100^k \cdot [10, 20)\,.$$

- Dirac-Maß δ_1 auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$: $\delta_1(A) = 1$ falls $A_1 \subseteq A$ und sonst 0 mit

$$A_1 = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} 10^k \cdot \{1\}\,.$$

Baseninvarianz II

- **Theorem** (Hill 1995)
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß **P** auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ ist genau dann baseninvariant, falls

  $$\mathbf{P} = q\mathbf{P}_B + (1-q)\delta_1$$

  mit einer Zahl $q \in [0,1]$ und der Benford-Verteilung $\mathbf{P}_B$.
- **Folgerung**
  Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß **P** auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ gilt:
  P ist skaleninvariant $\Rightarrow$ **P** ist baseninvariant.
  Die Umkehrung gilt nicht Allgemein.

Baseninvarianz II

- **Theorem** (Hill 1995)
  Ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ ist genau dann baseninvariant, falls

  $$\mathbf{P} = q\mathbf{P}_B + (1-q)\delta_1$$

  mit einer Zahl $q \in [0,1]$ und der Benford-Verteilung $\mathbf{P}_B$.

- **Folgerung**
  Für ein Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{P}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ gilt:
  $\mathbf{P}$ ist skaleninvariant $\Rightarrow$ $\mathbf{P}$ ist baseninvariant.
  Die Umkehrung gilt nicht Allgemein.

Zufällige Wahrscheinlichkeitsmaße

- **Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$**: Zufallsvariable $\mathbb{M}$ in der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, so dass $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\ \ \mathbb{M}(B)$ eine Zufallsgröße ist.
- **Erwartetes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{E}\mathbb{M}$ zu $\mathbb{M}$**:
  $(\mathbf{E}\mathbb{M})(B) = \mathbf{E}\left(\mathbb{M}(B)\right) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
- **Geg.:** Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ und $k \in \mathbb{N}$.
  Eine Folge von $\mathbb{M}-$zufälligen $k-$Stichproben ist eine Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, so dass für eine u.i.v. Folge $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \ldots$ von zufälligen Wahrscheinlichkeitsmaßen mit derselben Verteilung $\mathbb{M}$ und für jedes $j = 1, 2, \ldots$ gilt
  - $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ sind unabhängig von $\{\mathbb{M}_i, X_{(i-1)k+1}, \ldots, X_{ik}\}$ für alle $i \neq j$.

Zufällige Wahrscheinlichkeitsmaße

- **Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbb{M}$: Zufallsvariable $\mathbb{M}$ in der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, so dass $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)\ \ \mathbb{M}(B)$ eine Zufallsgröße ist.

- **Erwartetes Wahrscheinlichkeitsmaß** $\mathbf{E}\mathbb{M}$ **zu** $\mathbb{M}$:
$(\mathbf{E}\mathbb{M})(B) = \mathbf{E}\left(\mathbb{M}(B)\right) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.

- **Geg.:** Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ und $k \in \mathbb{N}$.
Eine Folge von $\mathbb{M}$−zufälligen k−Stichproben ist eine Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, so dass für eine u.i.v. Folge $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \ldots$ von zufälligen Wahrscheinlichkeitsmaßen mit derselben Verteilung $\mathbb{M}$ und für jedes $j = 1, 2, \ldots$ gilt

  - für gegebenes $\mathbb{M}_j = P$ sind die Zufallsgrößen [illegible] mit Verteilung P,

Zufällige Wahrscheinlichkeitsmaße

- Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$: Zufallsvariable $\mathbb{M}$ in der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, so dass $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \;\; \mathbb{M}(B)$ eine Zufallsgröße ist.
- Erwartetes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{E}\mathbb{M}$ zu $\mathbb{M}$:
  $(\mathbf{E}\mathbb{M})(B) = \mathbf{E}\left(\mathbb{M}(B)\right) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
- **Geg.:** Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ und $k \in \mathbb{N}$.
  Eine Folge von $\mathbb{M}-$zufälligen $k-$Stichproben ist eine Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, so dass für eine u.i.v. Folge $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \ldots$ von zufälligen Wahrscheinlichkeitsmaßen mit derselben Verteilung $\mathbb{M}$ und für jedes $j = 1, 2, \ldots$ gilt
  - für gegebenes $\mathbb{M}_j = \mathbf{P}$ sind die Zufallsgrößen $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ u.i.v. mit Verteilung $\mathbf{P}$;
  - $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ sind unabhängig von $\{\mathbb{M}_i, X_{(i-1)k+1}, \ldots, X_{ik}\}$ für alle $i \neq j$.

Zufällige Wahrscheinlichkeitsmaße

- Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$: Zufallsvariable $\mathbb{M}$ in der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, so dass $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \;\; \mathbb{M}(B)$ eine Zufallsgröße ist.
- Erwartetes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{E}\mathbb{M}$ zu $\mathbb{M}$: $(\mathbf{E}\mathbb{M})(B) = \mathbf{E}\,(\mathbb{M}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
- **Geg.:** Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ und $k \in \mathbb{N}$.
  Eine Folge von $\mathbb{M}-$zufälligen $k-$Stichproben ist eine Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, so dass für eine u.i.v. Folge $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \ldots$ von zufälligen Wahrscheinlichkeitsmaßen mit derselben Verteilung $\mathbb{M}$ und für jedes $j = 1, 2, \ldots$ gilt
  - für gegebenes $\mathbb{M}_j = \mathbf{P}$ sind die Zufallsgrößen $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ u.i.v. mit Verteilung $\mathbf{P}$;
  - $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ sind unabhängig von $\{\mathbb{M}_i, X_{(i-1)k+1}, \ldots, X_{ik}\}$ für alle $i \neq j$.

Zufällige Wahrscheinlichkeitsmaße

- Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$: Zufallsvariable $\mathbb{M}$ in der Menge der Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{B}(\mathbb{R}^+))$, so dass $\forall\, B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+) \;\; \mathbb{M}(B)$ eine Zufallsgröße ist.
- Erwartetes Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbf{E}\mathbb{M}$ zu $\mathbb{M}$:
  $(\mathbf{E}\mathbb{M})(B) = \mathbf{E}\,(\mathbb{M}(B)) \quad \forall B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^+)$.
- **Geg.:** Zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ und $k \in \mathbb{N}$.
  Eine Folge von $\mathbb{M}-$zufälligen $k-$Stichproben ist eine Folge von Zufallsgrößen $X_1, X_2, \ldots$, so dass für eine u.i.v. Folge $\mathbb{M}_1, \mathbb{M}_2, \ldots$ von zufälligen Wahrscheinlichkeitsmaßen mit derselben Verteilung $\mathbb{M}$ und für jedes $j = 1, 2, \ldots$ gilt
  - für gegebenes $\mathbb{M}_j = \mathbf{P}$ sind die Zufallsgrößen $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ u.i.v. mit Verteilung $\mathbf{P}$;
  - $X_{(j-1)k+1}, \ldots, X_{jk}$ sind unabhängig von $\{\mathbb{M}_i, X_{(i-1)k+1}, \ldots, X_{ik}\}$ für alle $i \neq j$.

Eine statistische Begründung für Benfords Gesetz

- **Definitionen**
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ skaleninvariant ist.
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ baseninvariant ist.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Sei $\mathbb{M}$ ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent
  (i) $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt.
  (ii) $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ besitzt keine Atome.
  (iii) $\forall\, t \in [1, 10) : \mathbf{E}\mathbb{M}[1, t) = \lg(t)$.
  (iv) Für jede $\mathbb{M}$–zufällige k–Stichprobe $X_1, X_2, \ldots$ gilt

$$\forall\, t \in [1, 10) : \frac{\#\{i \le n : S(X_i) \in [1, t)\}}{n} \to_{n\to\infty} \lg(t) \text{ f.s.}$$

Eine statistische Begründung für Benfords Gesetz

- **Definitionen**
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ skaleninvariant ist.
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ baseninvariant ist.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Sei $\mathbb{M}$ ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent

  (i) $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt.
  (ii) $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ besitzt keine Atome.
  (iii) $\forall\, t \in [1, 10) \,:\, \mathbf{E}\mathbb{M}[1, t) = \lg(t)$.
  (iv) Für jede $\mathbb{M}$–zufällige k–Stichprobe $X_1, X_2, \ldots$ gilt

$$\forall\, t \in [1, 10) \,:\, \frac{\#\{i \le n : S(X_i) \in [1, t)\}}{n} \to_{n\to\infty} \lg(t) \text{ f.s.}$$

Eine statistische Begründung für Benfords Gesetz

- **Definitionen**
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ skaleninvariant ist.
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ baseninvariant ist.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Sei $\mathbb{M}$ ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent
  (i) $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt.
  (ii) $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ besitzt keine Atome.
  (iii) $\forall\, t \in [1, 10) \;:\; \mathbf{E}\mathbb{M}[1, t) = \lg(t)$.
  (iv) Für jede $\mathbb{M}$–zufällige k–Stichprobe $X_1, X_2, \ldots$ gilt

$$\forall\, t \in [1, 10) \;:\; \frac{\#\{i \le n : S(X_i) \in [1, t)\}}{n} \to_{n\to\infty} \lg(t) \text{ f.s.}$$

Eine statistische Begründung für Benfords Gesetz

- **Definitionen**
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ skaleninvariant ist.
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ baseninvariant ist.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Sei $\mathbb{M}$ ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent
  (i) $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt.
  (ii) $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ besitzt keine Atome.
  (iii) $\forall\, t \in [1, 10) \, : \mathbf{E}\mathbb{M}[1, t) = \lg(t)$.
  (iv) Für jede $\mathbb{M}$−zufällige k−Stichprobe $X_1, X_2, \ldots$ gilt

$$\forall\, t \in [1, 10) \, : \frac{\#\{i \le n \, : S(X_i) \in [1, t)\}}{n} \to_{n\to\infty} \lg(t) \text{ f.s.}$$

Eine statistische Begründung für Benfords Gesetz

- **Definitionen**
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ skaleninvariant ist.
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ baseninvariant ist.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Sei $\mathbb{M}$ ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent
  (i) $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt.
  (ii) $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ besitzt keine Atome.
  (iii) $\forall\, t \in [1, 10) \ : \mathbf{E}\mathbb{M}[1, t) = \lg(t)$.
  (iv) Für jede $\mathbb{M}-$zufällige $k-$Stichprobe $X_1, X_2, \ldots$ gilt

$$\forall\, t \in [1, 10) \ : \frac{\#\{i \le n \ : S(X_i) \in [1, t)\}}{n} \to_{n\to\infty} \lg(t) \text{ f.s.}$$

Eine statistische Begründung für Benfords Gesetz

- **Definitionen**
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ skaleninvariant ist.
  Ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt, falls $\mathbf{E}\mathbb{M}$ baseninvariant ist.

- **Theorem** (Hill 1995)
  Sei $\mathbb{M}$ ein zufälliges Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$. Dann sind die folgenden Bedingungen äquivalent
  (i) $\mathbb{M}$ ist skalenunverzerrt.
  (ii) $\mathbb{M}$ ist basenunverzerrt und $\mathbf{E}\mathbb{M}$ besitzt keine Atome.
  (iii) $\forall\, t \in [1, 10) \;:\; \mathbf{E}\mathbb{M}[1, t) = \lg(t)$.
  (iv) Für jede $\mathbb{M}-$zufällige $k-$Stichprobe $X_1, X_2, \ldots$ gilt

$$\forall\, t \in [1, 10) \;:\; \frac{\#\{i \leq n \;:\; S(X_i) \in [1, t)\}}{n} \rightarrow_{n\to\infty} \lg(t) \text{ f.s.}$$

Noch einmal Resultate von Frank Benford

Percentage of Times the Natural Numbers 1 to 9 are Used as First Digits in Numbers, as Determined by 20,229 Observations

Group	Title	First Digit 1	2	3	4	5	6	7	8	9	Count
A	Rivers, Area	31.0	16.4	10.7	11.3	7.2	8.6	5.5	4.2	5.1	335
B	Population	33.9	20.4	14.2	8.1	7.2	6.2	4.1	3.7	2.2	3259
C	Constants	41.3	14.4	4.8	8.6	10.6	5.8	1.0	2.9	10.6	104
D	Newspapers	30.0	18.0	12.0	10.0	8.0	6.0	6.0	5.0	5.0	100
E	Spec. Heat	24.0	18.4	16.2	14.6	10.6	4.1	3.2	4.8	4.1	1389
F	Pressure	29.6	18.3	12.8	9.8	8.3	6.4	5.7	4.4	4.7	703
G	H.P. Lost	30.0	18.4	11.9	10.8	8.1	7.0	5.1	5.1	3.6	690
H	Mol. Wgt.	26.7	25.2	15.4	10.8	6.7	5.1	4.1	2.8	3.2	1800
I	Drainage	27.1	23.9	13.8	12.6	8.2	5.0	5.0	2.5	1.9	159
J	Atomic Wgt.	47.2	18.7	5.5	4.4	6.6	4.4	3.3	4.4	5.5	91
K	$n^{-1}, \sqrt{n}, \cdots$	25.7	20.3	9.7	6.8	6.6	6.8	7.2	8.0	8.9	5000
L	Design	26.8	14.8	14.3	7.5	8.3	8.4	7.0	7.3	5.6	560
M	*Digest*	33.4	18.5	12.4	7.5	7.1	6.5	5.5	4.9	4.2	308
N	Cost Data	32.4	18.8	10.1	10.1	9.8	5.5	4.7	5.5	3.1	741
O	X-Ray Volts	27.9	17.5	14.4	9.0	8.1	7.4	5.1	5.8	4.8	707
P	Am. League	32.7	17.6	12.6	9.8	7.4	6.4	4.9	5.6	3.0	1458
Q	Black Body	31.0	17.3	14.1	8.7	6.6	7.0	5.2	4.7	5.4	1165
R	Addresses	28.9	19.2	12.6	8.8	8.5	6.4	5.6	5.0	5.0	342
S	$n^2, n^3 \cdots n!$	25.3	16.0	12.0	10.0	8.5	8.8	6.8	7.1	5.5	900
T	Death Rate	27.0	18.6	15.7	9.4	6.7	6.5	7.2	4.8	4.1	418
	Average	30.6	18.5	12.4	9.4	8.0	6.4	5.1	4.9	4.7	1011
	Probable Error	±0.8	±0.4	±0.4	±0.3	±0.2	±0.2	±0.2	±0.2	±0.3	—

Quelle: Hungerbühler (2007).

Beispiele von Anwendungen I

E. Acebo, M. Sbert; *Benford's Law for Natural and Synthetic Images;* 2005

Abstract Benford's Law (also known as the First Digit Law) is well known in statistics of natural phenomena. It states that, when dealing with quantities obtained from Nature, the frequency of appearance of each digit in the first significant place is logarithmic. This law has been observed over a broad range of statistical phenomena. In this paper, we will explore its application to image analysis. We will show how light intensities in natural images, under certain constraints, obey this law closely. We will also show how light intensities in synthetic images follow this law whenever they are generated using physically realistic methods, and fail otherwise. Finally, we will study how transformations on the images affect the adjustment to the Law and how the fitting to the law is related to the fitting of the distribution of the raw intensities of the image to a power law.

Beispiele von Anwendungen II

L. Arshadi, A. H. Jahangir; *Benford's law behavior of Internet traffic;* 2014

Abstract In this paper, we analyze the Internet traffic from a different point of view based on Benford's law, an empirical law that describes the distribution of leading digits in a collection of numbers met in naturally occurring phenomena. We claim that Benford's law holds for the inter-arrival times of TCP flows in case of normal traffic. Consequently, any type of anomalies affecting TCP flows, including intentional intrusions or unintended faults and network failures in general, can be detected by investigating the first-digit distributions of the inter-arrival times of TCP SYN packets. In this paper we apply our findings to the detection of intentional attacks, and leave other types of anomalies for future works. We support our claim with related researches that indicate the TCP flow inter-arrival times can be modeled by Weibull distribution with shape parameter less than 1, and show the relation between Weibull distributed data and Benford's law. Finally, we validate our findings on real traffic and achieve encouraging results.

Beispiele von Anwendungen III

M. Ausloos, C. Herteliu, B. Ileanu; *Breakdown of Benford's law for birth data;* 2015

Abstract
Long birth time series for Romania are investigated from Benford's law point of view, distinguishing between families with a religious (Orthodox and Non-Orthodox) affiliation. The data extend from Jan. 01, 1905 till Dec. 31, 2001, i.e. over 97 years or 35 429 days. The results point to a drastic breakdown of Benford's law. Some interpretation is proposed, based on the statistical aspects due to population sizes, rather than on human thought constraints when the law breakdown is usually expected. Benford's law breakdown clearly points to natural causes.

Beispiele von Anwendungen IV

A. Berger, T. P. Hill; *Newton's Method Obeys Benford's Law;* 2007

Theorem 1. Suppose that $f : I \to \mathbb{R}$ is real-analytic, that $f(x^*) = 0$, and that f is not linear.

(i) If x^* is a simple root of f, then $(x_n - x^*)$ and $(x_{n+1} - x_n)$ are both $b-$Benford for (Lebesgue) almost all x_0 in a neighborhood of x^* and for all b in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(ii) If x^* is a double root of f, then the same conclusion holds for all x_0 different from x^* in some neighborhood of x^*, unless $b = 2^j$ for some $j \in \mathbb{N}$.

(iii) If x^* is a root of f of multiplicity at least three, then the same conclusion holds for all x_0 different from x^* in some neighborhood of x^* and for all b in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Beispiele von Anwendungen IV

A. Berger, T. P. Hill; *Newton's Method Obeys Benford's Law;* 2007

Theorem 1. Suppose that $f : I \to \mathbb{R}$ is real-analytic, that $f(x^*) = 0$, and that f is not linear.

(i) If x^* is a simple root of f, then $(x_n - x^*)$ and $(x_{n+1} - x_n)$ are both $b-$Benford for (Lebesgue) almost all x_0 in a neighborhood of x^* and for all b in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(ii) If x^* is a double root of f, then the same conclusion holds for all x_0 different from x^* in some neighborhood of x^*, unless $b = 2^j$ for some $j \in \mathbb{N}$.

(iii) If x^* is a root of f of multiplicity at least three, then the same conclusion holds for all x_0 different from x^* in some neighborhood of x^* and for all b in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Beispiele von Anwendungen IV

A. Berger, T. P. Hill; *Newton's Method Obeys Benford's Law;* 2007

Theorem 1. Suppose that $f : I \to \mathbb{R}$ is real-analytic, that $f(x^*) = 0$, and that f is not linear.

(i) If x^* is a simple root of f, then $(x_n - x^*)$ and $(x_{n+1} - x_n)$ are both $b-$Benford for (Lebesgue) almost all x_0 in a neighborhood of x^* and for all b in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

(ii) If x^* is a double root of f, then the same conclusion holds for all x_0 different from x^* in some neighborhood of x^*, unless $b = 2^j$ for some $j \in \mathbb{N}$.

(iii) If x^* is a root of f of multiplicity at least three, then the same conclusion holds for all x_0 different from x^* in some neighborhood of x^* and for all b in $\mathbb{N} \setminus \{1\}$.

Beispiele von Anwendungen V

M. J. K. De Ceuster, G. Dhaene, T. Schatteman; *On the hypothesis of psychological barriers in stock markets and Benford's Law;* 1998

Abstract
We consider the hypothesis of psychological barriers at round numbers of a stock index. This hypothesis is often examined by testing the uniformity of the distribution of the trailing digits in the stock index, a rejection being interpreted as evidencing the existence of psychological barriers. By virtue of Benford's Law, we show that the uniform distribution is not the right benchmark against which to test. As an alternative we propose a test based on the cyclical permutations of the actual returns. Applying this test to the Dow Jones 30 Industrial Average, the Financial Times – Stock Exchange 100 and the Nikkei Stock Average 225, we find no convincing evidence of psychological barriers, contrary to previous findings.

Beispiele von Anwendungen VI

E. Ley; *On the Peculiar Distribution of the U.S. Stock Indexes' Digits;* 1996

Abstract Recent research has focused on studying the patterns in the digits of closely followed stock market indexes. In this paper we find that the series of 1-day returns on the Dow-Jones Industrial Average Index (DJIA) and the Standard and Poor's Index (S&P) reasonably agrees with Benford's law and therefore belongs to the family of anomalous or outlaw numbers.

Beispiele von Anwendungen VII

M. J. NIGRINI; *A Taxpayer Compliance Application of Benford's Law;* 1996

Abstract This study investigates whether the nonrandom element of human behavior could facilitate the detection of tax evasion. Unplanned Evasion (UPE) is defined to be blatant manipulation by the taxpayer of line items at filing time. Planned Evasion (PE) is the result of planned actions to conceal an audit trail. UPE requires that the taxpayer invent a number(s) for the line item(s).
Benford's Law (Benford 1938) is used as an expected distribution for the digits in tabulated data. The assumption is that the digits of data that are truthfully reported, or are subject to PE, should conform to the expected digital frequencies. A Distortion Factor model that quantifies the extent of UPE is developed. Tax returns on the U.S. Internal Revenue Service Individual Tax Model Files are analyzed. The analysis, based on digital frequencies, indicates that Low Income taxpayers practice UPE to a greater extent than High Income taxpayers.

Beispiele von Anwendungen VIII

M. J. Nigrini, S. J. Miller; *Benford's Law Applied to Hydrology Data – Results and Relevance to Other Geophysical Data;* 2007

Abstract Benford's Law gives the expected frequencies of the digits in tabulated data and asserts that the lower digits (1, 2, and 3) are expected to occur more frequently than the higher digits. This study tested whether the law applied to two large earth science data sets. The first test analyzed streamflow statistics and the finding was a close conformity to Benford's Law. The second test analyzed the sizes of lakes and wetlands, and the finding was that the data did not conform to Benfords Law.

. . . Our results indicate that data related to water bodies should conform to Benford's Law and that nonconformity could be indicators of (a) an incomplete data set, (b) the sample not being representative of the population, (c) excessive rounding of the data, (d) data errors, inconsistencies, or anomalies, and/or (e) conformity to a power law with a large exponent.

Beispiele von Anwendungen IX

B. F. Roukema; *A first-digit anomaly in the 2009 Iranian presidential election;* 2014

Abstract A local bootstrap method is proposed for the analysis of electoral vote-count first-digit frequencies, complementing the Benford's Law limit. The method is calibrated on five presidential-election first rounds (2002–2006) and applied to the 2009 Iranian presidential-election first round. Candidate K has a highly significant ($p < 0.15\%$) excess of vote counts starting with the digit 7. This leads to other anomalies, two of which are individually significant at $p \sim 0.1\%$, and one at $p \sim 1\%$. Independently, Iranian pre-election opinion polls significantly reject the official results unless the five polls favouring candidate A are considered alone. If the latter represent normalised data and a linear, least-squares, equal-weighted fit is used, then either candidates R and K suffered a sudden, dramatic ($70\% \pm 15\%$) loss of electoral support just prior to the election, or the official results are rejected ($p \sim 0.01\%$).

Beispiele von Anwendungen X

K. Schürger; *Extensions of Black-Scholes processes and Benford's Law;* 2008

Abstract Let Z be a stochastic process of the form $Z(t) = Z(0)\exp(\mu t + X(t) - \langle X\rangle_t/2)$ where $Z(0) > 0$, μ are constants, and X is a continuous local martingale having a deterministic quadratic variation $\langle X\rangle$ such that $\langle X\rangle_t \to \infty$ as $t \to \infty$. We show that the mantissa (base b) of $Z(t)$ (denoted by $M^{(b)}(Z(t))$) converges weakly to Benford's law as $t \to \infty$. Supposing that $\langle X\rangle$ satisfies a certain growth condition, we obtain large deviation results for certain functionals (including occupation time) of $(M^{(b)}(Z(t)))$. Similar results are obtained in the discrete-time case. The latter are used to construct a non-parametric test for nonnegative processes $(Z(t))$ (based on the observation of significant digits of $(Z(n))$) of the null hypothesis $H_0(\sigma_0)$ which says that Z is a general Black-Scholes process having a volatility $\sigma \geq \sigma_0 (> 0)$. Finally it is shown that the mantissa of Brownian motion is not even weakly convergent.

Beispiele von Anwendungen XI

A. SEN(DE), U. SEN; *Benford's law detects quantum phase transitions similarly as earthquakes;* 2011

Abstract A century ago, it was predicted that the first significant digit appearing in a data would be nonuniformly distributed, with the number one appearing with the highest frequency. This law goes by the name of Benford's law. It holds for data ranging from infectious disease cases to national greenhouse gas emissions. Quantum phase transitions are cooperative phenomena where qualitative changes occur in many-body systems at zero temperature. We show that the century-old Benford's law can detect quantum phase transitions, much like it detects earthquakes. Therefore, being certainly of very different physical origins, seismic activity and quantum cooperative phenomena may be detected by similar methods. The result has immediate implications in precise measurements in experiments in general, and for realizable quantum computers in particular. It shows that estimation of the first significant digit of measured physical observables is enough to detect the presence of quantum phase transitions in macroscopic systems.

Beispiele von Anwendungen XII

T. A. Mir; *Citations to articles citing Benford's law: a Benford analysis;* 2016

Abstract The occurrence of first significant digits of numbers in large data is often governed by a logarithmically decreasing distribution called Benford's law (BL), reported first by S. Newcomb (SN) and many decades later independently by F. Benford (FB). Due to its counter-intuitiveness the law was ignored for decades as a mere curious observation. However, an indication of its remarkable resurgence is the huge swell in the number of citations received by the papers of SN/FB. The law has come a long way, from obscurity to now being a regular subject of books, peer reviewed papers, patents, blogs and news. Here, we use Google Scholar (GS) to collect the data on the number of citations received by the articles citing the original paper of SN/FB and then investigate whether the leading digits of this citations data are distributed according to the law they discovered. We find that the citations data of literature on BL is in remarkable agreement with the predictions of the law.

Beispiele von Anwendungen – Patent

(12) **United States Patent**
Shi et al.

(10) **Patent No.: US 7,940,989 B2**
(45) **Date of Patent: May 10, 2011**

(54) **APPARATUS AND METHOD FOR A GENERALIZED BENFORD'S LAW ANALYSIS OF DCT AND JPEG COEFFICIENTS**

(75) Inventors: **Yun-Quing Shi**, Millburn, NJ (US); **DongDong Fu**, Harrison, NJ (US)

(73) Assignee: **New Jersey Institute of Technology**, Newark, NJ (US)

(*) Notice: Subject to any disclaimer, the term of this patent is extended or adjusted under 35 U.S.C. 154(b) by 980 days.

(21) Appl. No.: **11/772,636**

(22) Filed: **Jul. 2, 2007**

(65) **Prior Publication Data**

US 2008/0031535 A1 Feb. 7, 2008

Zhigang Fan et al: "Identification of Bitmap Compression History: JPEG Detection and Quantizer Estimation" IEEE Transactions on Image Processing, IEEE Service Center, vol. 12, No. 2, Feb. 2, 2003, pp. 230-235.
Lukas, J. et al: "Estimation of Primary Quantization Matrix in Double Compressed JPEG Images", Proceedings of Digital Forensic Research Workshop (DFRWS) 2003, Aug. 5, 2003-Aug. 8, 2003, pp. 1-17.
Jolion J -M: "Images and Benford's law" Journal of Mathematical Imaging and Vision Kluwer Academic Publishers Netherlands, vol. 14, No. 1, Feb. 2001, pp. 73-81.
Acebo E. et al; "Benford's Law for Natural and Synthetic Images" Eurographics Workshop on Computational Aesthetics OM Graphics, Visualization and Imagin, May 18, 2005-May 20, 2005, p. 169, 171.
Hill et al; "Regularity of digits and significant digits of random variables", Stochastic Processes and Their Applications, North-Holland, vol. 115, No. 10, Oct. 2005, pp. 1723-1743.
Pevny, T et al. "Estimation of Primary Quantization Matrix for Steganalysis of Double-Compressed JPEG Images", Proc. Spie, Electronic Imaging, Security, Forensics, Steganography, and Watermarking of Multimedia Contents, Jan. 28, 2008-Jan. 31, 2008, pp. 1-13.

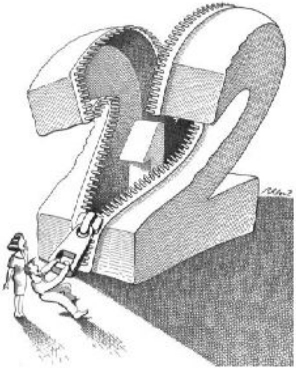
* cited by examiner

Hilbert's Traum

Mitteilungen der DMV, Bd.8, 2004, Nr.4

Eichel s Law

von Burkhard Straßmann



(vgl. auch Briefe an die Herausgeber in den nachfolgenden Nummern)

Forschung „in der Nähe“ – Prof. Dr. Peter Schatte

Auswahl von Arbeiten:

- P. Schatte. *Zur Verteilung der Mantisse in der Gleitkommadarstellung einer Zufallsgröße.* 1973.
- P. Schatte. *On random variables with logarithmic mantissa distribution relative to several bases.* 1981.
- P. Schatte. *On the asymptotic logarithmic distribution of the floating-point mantissas of sums.* 1986.
- P. Schatte. *On measures of uniformly distributed sequences and Benford's law.* 1989.
- P. Schatte. *On Benford's law for continued fractions.* 1990.
- P. Schatte. *On Benford's law to variable base.* 1998.

Forschung „in der Nähe“ – Prof. Dr. Peter Schatte

Auswahl von Arbeiten:

- P. Schatte. *Zur Verteilung der Mantisse in der Gleitkommadarstellung einer Zufallsgröße.* 1973.
- P. Schatte. *On random variables with logarithmic mantissa distribution relative to several bases.* 1981.
- P. Schatte. *On the asymptotic logarithmic distribution of the floating-point mantissas of sums.* 1986.
- P. Schatte. *On measures of uniformly distributed sequences and Benford's law.* 1989.
- P. Schatte. *On Benford's law for continued fractions.* 1990.
- P. Schatte. *On Benford's law to variable base.* 1998.

Forschung „in der Nähe" – Prof. Dr. Peter Schatte

Auswahl von Arbeiten:

- P. Schatte. *Zur Verteilung der Mantisse in der Gleitkommadarstellung einer Zufallsgröße.* 1973.
- P. Schatte. *On random variables with logarithmic mantissa distribution relative to several bases.* 1981.
- P. Schatte. *On the asymptotic logarithmic distribution of the floating-point mantissas of sums.* 1986.
- P. Schatte. *On measures of uniformly distributed sequences and Benford's law.* 1989.
- P. Schatte. *On Benford's law for continued fractions.* 1990.
- P. Schatte. *On Benford's law to variable base.* 1998.

Forschung „in der Nähe“ – Prof. Dr. Peter Schatte

Auswahl von Arbeiten:

- P. Schatte. *Zur Verteilung der Mantisse in der Gleitkommadarstellung einer Zufallsgröße.* 1973.
- P. Schatte. *On random variables with logarithmic mantissa distribution relative to several bases.* 1981.
- P. Schatte. *On the asymptotic logarithmic distribution of the floating-point mantissas of sums.* 1986.
- P. Schatte. *On measures of uniformly distributed sequences and Benford's law.* 1989.
- P. Schatte. *On Benford's law for continued fractions.* 1990.
- P. Schatte. *On Benford's law to variable base.* 1998.

Forschung „in der Nähe“ – Prof. Dr. Peter Schatte

Auswahl von Arbeiten:

- P. Schatte. *Zur Verteilung der Mantisse in der Gleitkommadarstellung einer Zufallsgröße.* 1973.
- P. Schatte. *On random variables with logarithmic mantissa distribution relative to several bases.* 1981.
- P. Schatte. *On the asymptotic logarithmic distribution of the floating-point mantissas of sums.* 1986.
- P. Schatte. *On measures of uniformly distributed sequences and Benford's law.* 1989.
- P. Schatte. *On Benford's law for continued fractions.* 1990.
- P. Schatte. *On Benford's law to variable base.* 1998.

Forschung „in der Nähe“ – Prof. Dr. Peter Schatte

Auswahl von Arbeiten:

- P. Schatte. *Zur Verteilung der Mantisse in der Gleitkommadarstellung einer Zufallsgröße.* 1973.
- P. Schatte. *On random variables with logarithmic mantissa distribution relative to several bases.* 1981.
- P. Schatte. *On the asymptotic logarithmic distribution of the floating-point mantissas of sums.* 1986.
- P. Schatte. *On measures of uniformly distributed sequences and Benford's law.* 1989.
- P. Schatte. *On Benford's law for continued fractions.* 1990.
- P. Schatte. *On Benford's law to variable base.* 1998.

GLÜCK, Diplomarbeit 2007, TU Dresden I

Die Benford-Verteilung. Anwendung auf reale Daten der Marktforschung.
MAJA IRENE SUSANNE GLÜCK (2007, GRIN Verlag)

Inhaltsangabe

Die vorliegende Arbeit handelt von Benfords Gesetz über die Verteilung signifikanter Ziffern von realen Zahlen und dessen Anwendung in der Marktforschung. Benfords Gesetz besagt kurzgefasst, dass die Anfangsziffern bestimmter Datenmengen nicht gleichverteilt sind, sondern einer logarithmischen Verteilung folgen.

Es werden ein Wahrscheinlichkeitsraum für Benfords Gesetz und Formeln für die Verteilung der ersten, zweiten und n-ten Ziffer sowie die gemeinsame Verteilung der ersten n Ziffern eingeführt. Ferner werden die besonderen Eigenschaften der Benford-Verteilung wie die Skalen- und die Baseninvarianz betrachtet. Als Hauptresultat wird ein Grenzwertsatz für signifikante Ziffern angegeben und bewiesen.

Glück, Diplomarbeit 2007, TU Dresden II

Als besondere Anwendungsmöglichkeit wird die Aufdeckung von Fälschungen bei Interviews in der Marktforschung betrachtet. Dazu werden die Prozesse der Datenerhebung beleuchtet und Ergebnisse bisheriger Studien vorgestellt. Die verschiedenen in der Marktforschung auftauchenden Datentypen werden analysiert und ihre Eignung als Prüfgrößen untersucht. Darauf aufbauend wird ein Programm zum Test auf die Benford-Verteilung vorgestellt und eine mögliche Testfrage auf Tauglichkeit untersucht.

JAKOBI, Diplomarbeit 2011, TU Ilmenau I

Das Benfordsche Gesetz und seine Anwendbarkeit bei der digitalen Prüfung von Fahrtenbüchern
GERNOT BRÄHLER, MARKUS BENSMANN, HANS-RALPH JAKOBI
(2011, Ilmenauer Schriften zur Betriebswirtschaftslehre)

Vorwort

Das Vertrauen in die Aussagekraft der Abschlussprüfungen wurde in den letzten Jahren durch eine Vielzahl von Bilanzskandalen erschüttert. Nach einer Studie der Association of Certified Fraud Examiners aus dem Jahr 2010 beläuft sich der geschätzte durchschnittliche Verlust allein durch Fraud auf 5 % des Betriebseinkommens. Dies entspricht einem durch Fraud entstandenen volkswirtschaftlichen Gesamtverlust für das Jahr 2009 von 2,9 Billionen USDollar.

Jakobi, Diplomarbeit 2011, TU Ilmenau II

Um Fälschungen und Missbrauch leichter und effizienter bekämpfen zu können und den technischen Entwicklungen Rechnung zu tragen, wird bereits seit längerem in der Betriebsprüfung der Finanzämter auf mathematisch-statistische Methoden wie bspw. die sogenannte Benford-Analyse oder den Chi-Quadrat-Anpassungstest zurückgegriffen. Mit Hilfe dieser Auswertungen werden Ziffern auf bestimmte Muster untersucht. Durch entsprechende Analysen ist es möglich, Bilanzmanipulationen aufzudecken.

Aufgrund der hohen Relevanz dieser Thematik hat das Fachgebiet für Allgemeine Betriebswirtschaftslehre, insbesondere Steuerlehre/Prüfungswesen im Wintersemester 2010/2011 hierzu eine Diplomarbeit unter dem Titel „Das Benfordsche Gesetz und seine Anwendbarkeit bei der digitalen Prüfung von Fahrtenbüchern“ an Herrn Hans-Ralph Jakobi vergeben. Der folgende Beitrag ist auf Grundlage dieser Diplomarbeit entstanden.

Aufdeckung von Bilanzfälschungen durch Anwendung des Newcomb-Benford-Gesetzes
TALHA YILMAZ (2011, Technische Hochschule Mittelhessen, Campus Friedeberg)

Vorwort

Die Eurokrise ist aktuell das Thema, welches Alle – Parlament, Börse, Nachrichten – beschäftigt, sowohl in Deutschland, Europa als auch auf der ganzen Welt. Griechenland steht mit seiner wirtschaftlichen Situation, im Mittelpunkt dieser Debatte. Alle befürchten, dass Griechenland Insolvenz geht und somit der Euro als einheitliche Währung versagt. Doch wiederum kämpfen alle dafür, dass dies nicht so kommt.

Nun hat ein Wissenschaftlerteam der Technischen Universität Ilmenau anhand eines Jahrhunderte alten mathematischen Gesetzes nachgewiesen, dass Griechenland seine Wirtschaftsdaten manipuliert hat.

Yilmaz, Bachelorarbeit 2011, TH Mittelhessen II

Griechenland hat über Jahre hinweg seine Bilanzen gefälscht und ist offenbar nur mit Hilfe dieser Fälschungen im Jahr 2001 in den Euro-Raum aufgenommen worden. Darüber hinaus hat Griechenland mit gefälschten Zahlen eventuell Strafzahlungen vermieden.

Hierbei handelt es sich um das „Newcomb-Benford-Gesetz", das stammt aus dem Jahre 1881. Anhand dieses Gesetzes kann man frühzeitig und ohne großen Aufwand verlässliche Indizien für Zahlenfälschungen erkennen.

Jetzt stellt man sich zu Recht die Frage, wie man eine Fälschung aufdecken kann, ohne einen Tipp aus dem engen Kreis der Fälscher bekommen zu haben.

Die Thesis folgt weitgehend der Darstellung des Buches „Ziffernanalyse" von Peter N. Posch, dabei wurden einige Ergebnisse allgemein verständlich verallgemeinert (wie z.B. durch Übergang von der Dezimalbasis 10 zu einer allgemeinen Basis b) und die Literatur stellenweise vereinfacht.

Uhlig, Diplomarbeit 2015, Universität Leipzig I

Rundum das Benfordsche Gesetz
Nico Uhlig (2015, Universität Leipzig)

Zusammenfassung

Ziel der vorliegenden Arbeit war es das von Newcomb und Benford aufgestellte Benfordsche Gesetz mathematisch zu präzisieren und Kriterien für die Gültigkeit zu erhalten. Dazu wurden zunächst die wichtigsten Definitionen in Form der Signifikanten und der signifikanten σ-Algebra getätigt. Es folgte die für die weiteren Untersuchungen wesentliche Definition der Benford-Eigenschaft für Zahlenfolgen, Funktionen, Zufallsgrößen und Wahrscheinlichkeitsmaße. Dabei wurde zudem die Benford-Verteilung $\mathbb{B}$ auf $(\mathbb{R}^+, \mathcal{S})$ eingeführt.

Mithilfe dieser Begriffsbildungen folgte als erstes Kriterium Satz 2.2, welcher die Benford-Eigenschaft für die verschiedenen Objekte mittels der Gleichverteilung modulo 1 charakterisiert.

Uhlig, Diplomarbeit 2015, Universität Leipzig II

Als eine erste Anwendung wurde in Beispiel 2.4 dann gezeigt, dass die Folge der Fibonacci-Zahlen die Benford-Eigenschaft besitzt, jedoch die Folge der Primzahlen nicht. Im Hinblick auf das Grenzverhalten von Folgen von Zufallsgrößen wurde die Konvergenz in Verteilung gegen das Benfordsche Gesetz eingeführt. Satz 2.6 zeigt dann, dass falls eine Folge von Zufallsgrößen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ unabhängig und identisch verteilt ist, so dass die Zufallsgröße X_1 nicht nur abzählbar viele Werte annimmt, das Produkt $\prod_{k=1}^{n} X_k$ in Verteilung gegen das Benfordsche Gesetz konvergiert. Als zweite große Charakterisierung der Benford-Eigenschaft folgte dann Satz 2.7. Dieser besagt, dass die Benford-Eigenschaft von Wahrscheinlichkeitsmaßen äquivalent zu der Eigenschaft von skaleninvarianten signifikanten Dezimalziffern ist. Ferner ließ sich die Benford-Verteilung mittels des sogenannten Multiplikationsspiels in Satz 2.8 charakterisieren.

Uhlig, Diplomarbeit 2015, Universität Leipzig III

Schließlich wurde in Satz 2.9 gezeigt, dass ein Wahrscheinlichkeitsmaß genau dann Basis-invariante signifikante Ziffern besitzt, wenn es sich als eine Konvexkombination aus dem Dirac-Maß δ_1 und der Benford-Verteilung $\mathbb{B}$ schreiben lässt.

Das letzte Kapitel widmete sich dann der asymptotischen Betrachtung von Produkten von Zufallsgrößen. Zunächst wurde in Satz 3.2 gezeigt, dass falls die Zufallsgröße X eine Riemannintegrierbare Dichte besitzt, die Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in Verteilung gegen das Benfordsche Gesetz konvergiert und die Folge $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 Benford ist. Im anschließenden Beispiel wurde zudem die Konvergenzgeschwindigkeit gegen das Benfordsche Gesetz für eine auf $[0,1)$ gleichverteilte Zufallsgröße bestimmt. Abschließend wurde dann das Produkt $\prod_{k=1}^n X_k$ einer unabhängig und identisch verteilten Folge von Zufallsgrößen untersucht. In Satz 3.9 wurde mithilfe des Birkhoffschen Ergodensatzes gezeigt, dass die Folge $(\prod_{k=1}^n X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ mit Wahrscheinlichkeit 1 Benford ist, falls X_1 nicht nur abzählbar viele Werte annimmt.

Ausgewählte Literatur I

- S. Newcomb. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers.* American Journal of Mathematics, v.4, no.1/4 (1881), pp.39–40.
- F. Benford. *The law of anomalous numbers.* Proceedings of the American Philosophical Society, v.78, no.4 (1938), pp.551–572.
- R. A. Raimi. *On the distribution of first significant figures.* The American Mathematical Monthly, v.76, no.4 (1969), pp.342–348.
- R. A. Raimi. *The first digit problem.* The American Mathematical Monthly, v.83, no.7 (1976), pp.521–538.
- T. P. Hill. *The significant-digit phenomenon.* The American Mathematical Monthly, v.102, no.4 (1995), pp.322–327.
- T. P. Hill. *Base-invariance implies Benford's law.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, no.3 (1995), pp.887–895.

Ausgewählte Literatur I

- S. Newcomb. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers.* American Journal of Mathematics, v.4, no.1/4 (1881), pp.39–40.
- F. Benford. *The law of anomalous numbers.* Proceedings of the American Philosophical Society, v.78, no.4 (1938), pp.551–572.
- R. A. Raimi. *On the distribution of first significant figures.* The American Mathematical Monthly, v.76, no.4 (1969), pp.342–348.
- R. A. Raimi. *The first digit problem.* The American Mathematical Monthly, v.83, no.7 (1976), pp.521–538.
- T. P. Hill. *The significant-digit phenomenon.* The American Mathematical Monthly, v.102, no.4 (1995), pp.322–327.
- T. P. Hill. *Base-invariance implies Benford's law.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, no.3 (1995), pp.887–895.

Ausgewählte Literatur I

- S. Newcomb. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers.* American Journal of Mathematics, v.4, no.1/4 (1881), pp.39–40.
- F. Benford. *The law of anomalous numbers.* Proceedings of the American Philosophical Society, v.78, no.4 (1938), pp.551–572.
- R. A. Raimi. *On the distribution of first significant figures.* The American Mathematical Monthly, v.76, no.4 (1969), pp.342–348.
- R. A. Raimi. *The first digit problem.* The American Mathematical Monthly, v.83, no.7 (1976), pp.521–538.
- T. P. Hill. *The significant-digit phenomenon.* The American Mathematical Monthly, v.102, no.4 (1995), pp.322–327.
- T. P. Hill. *Base-invariance implies Benford's law.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, no.3 (1995), pp.887–895.

Ausgewählte Literatur I

- S. Newcomb. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers.* American Journal of Mathematics, v.4, no.1/4 (1881), pp.39–40.
- F. Benford. *The law of anomalous numbers.* Proceedings of the American Philosophical Society, v.78, no.4 (1938), pp.551–572.
- R. A. Raimi. *On the distribution of first significant figures.* The American Mathematical Monthly, v.76, no.4 (1969), pp.342–348.
- R. A. Raimi. *The first digit problem.* The American Mathematical Monthly, v.83, no.7 (1976), pp.521–538.
- T. P. Hill. *The significant-digit phenomenon.* The American Mathematical Monthly, v.102, no.4 (1995), pp.322–327.
- T. P. Hill. *Base-invariance implies Benford's law.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, no.3 (1995), pp.887–895.

Ausgewählte Literatur I

- S. Newcomb. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers.* American Journal of Mathematics, v.4, no.1/4 (1881), pp.39–40.
- F. Benford. *The law of anomalous numbers.* Proceedings of the American Philosophical Society, v.78, no.4 (1938), pp.551–572.
- R. A. Raimi. *On the distribution of first significant figures.* The American Mathematical Monthly, v.76, no.4 (1969), pp.342–348.
- R. A. Raimi. *The first digit problem.* The American Mathematical Monthly, v.83, no.7 (1976), pp.521–538.
- T. P. Hill. *The significant-digit phenomenon.* The American Mathematical Monthly, v.102, no.4 (1995), pp.322–327.
- T. P. Hill. *Base-invariance implies Benford's law.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, no.3 (1995), pp.887–895.

Ausgewählte Literatur I

- S. Newcomb. *Note on the frequency of use of the different digits in natural numbers.* American Journal of Mathematics, v.4, no.1/4 (1881), pp.39–40.
- F. Benford. *The law of anomalous numbers.* Proceedings of the American Philosophical Society, v.78, no.4 (1938), pp.551–572.
- R. A. Raimi. *On the distribution of first significant figures.* The American Mathematical Monthly, v.76, no.4 (1969), pp.342–348.
- R. A. Raimi. *The first digit problem.* The American Mathematical Monthly, v.83, no.7 (1976), pp.521–538.
- T. P. Hill. *The significant-digit phenomenon.* The American Mathematical Monthly, v.102, no.4 (1995), pp.322–327.
- T. P. Hill. *Base-invariance implies Benford's law.* Proceedings of the American Mathematical Society, v.123, no.3 (1995), pp.887–895.

Ausgewählte Literatur II

- T. P. Hill. *A statistical derivation of the significant-digit law.* Statistical Science. A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics, v.10, no.4 (1995), pp.354–363.
- N. Hungerbühler. *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt.* 2007. http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford.
- A. Berger, T. P. Hill. *A basic theory of Benford's law.* Probability Surveys, v.8 (2011), pp.1–126.
- A. Berger, T. P. Hill. *An Introduction to Benford's Law.* Princeton University Press 2015.
- S. J. Miller (Ed.). *Benford's Law: Theory and Applications* Princeton University Press 2015.
- A. Berger, T. P. Hill, E. Rogers. Benford Online Bibliography. http://www.benfordonline.net, 2009. (Last accessed 19.09.2016.)

Ausgewählte Literatur II

- T. P. Hill. *A statistical derivation of the significant-digit law.* Statistical Science. A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics, v.10, no.4 (1995), pp.354–363.
- N. Hungerbühler. *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt.* 2007. http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford.
- A. Berger, T. P. Hill. *A basic theory of Benford's law.* Probability Surveys, v.8 (2011), pp.1–126.
- A. Berger, T. P. Hill. *An Introduction to Benford's Law.* Princeton University Press 2015.
- S. J. Miller (Ed.). *Benford's Law: Theory and Applications* Princeton University Press 2015.
- A. Berger, T. P. Hill, E. Rogers. Benford Online Bibliography. http://www.benfordonline.net, 2009. (Last accessed 10.09.2016.)

Ausgewählte Literatur II

- T. P. Hill. *A statistical derivation of the significant-digit law.* Statistical Science. A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics, v.10, no.4 (1995), pp.354–363.
- N. Hungerbühler. *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt.* 2007. http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford.
- A. Berger, T. P. Hill. *A basic theory of Benford's law.* Probability Surveys, v.8 (2011), pp.1–126.
- A. Berger, T. P. Hill. *An Introduction to Benford's Law.* Princeton University Press 2015.
- S. J. Miller (Ed.). *Benford's Law: Theory and Applications* Princeton University Press 2015.
- A. Berger, T. P. Hill, E. Rogers. Benford Online Bibliography. http://www.benfordonline.net, 2009. (Last accessed 19.09.2016.)

Ausgewählte Literatur II

- T. P. HILL. *A statistical derivation of the significant-digit law.* Statistical Science. A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics, v.10, no.4 (1995), pp.354–363.
- N. HUNGERBÜHLER. *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt.* 2007. http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford.
- A. BERGER, T. P. HILL. *A basic theory of Benford's law.* Probability Surveys, v.8 (2011), pp.1–126.
- A. BERGER, T. P. HILL. *An Introduction to Benford's Law.* Princeton University Press 2015.
- S. J. MILLER (ED.). *Benford's Law: Theory and Applications* Princeton University Press 2015.
- A. BERGER, T. P. HILL, E. ROGERS. Benford Online Bibliography. http://www.benfordonline.net, 2009. (Last accessed 19.09.2016.)

Ausgewählte Literatur II

- T. P. Hill. *A statistical derivation of the significant-digit law.* Statistical Science. A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics, v.10, no.4 (1995), pp.354–363.
- N. Hungerbühler. *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt.* 2007. http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford.
- A. Berger, T. P. Hill. *A basic theory of Benford's law.* Probability Surveys, v.8 (2011), pp.1–126.
- A. Berger, T. P. Hill. *An Introduction to Benford's Law.* Princeton University Press 2015.
- S. J. Miller (Ed.). *Benford's Law: Theory and Applications* Princeton University Press 2015.
- A. Berger, T. P. Hill, E. Rogers. Benford Online Bibliography. http://www.benfordonline.net, 2009. (Last accessed 19.09.2016.)

Ausgewählte Literatur II

- T. P. Hill. *A statistical derivation of the significant-digit law.* Statistical Science. A Review Journal of the Institute of Mathematical Statistics, v.10, no.4 (1995), pp.354–363.
- N. Hungerbühler. *Benfords Gesetz über führende Ziffern: Wie die Mathematik Steuersündern das Fürchten lehrt.* 2007. http://www.educ.ethz.ch/unt/um/mathe/ana/benford.
- A. Berger, T. P. Hill. *A basic theory of Benford's law.* Probability Surveys, v.8 (2011), pp.1–126.
- A. Berger, T. P. Hill. *An Introduction to Benford's Law.* Princeton University Press 2015.
- S. J. Miller (Ed.). *Benford's Law: Theory and Applications* Princeton University Press 2015.
- A. Berger, T. P. Hill, E. Rogers. Benford Online Bibliography. http://www.benfordonline.net, 2009. (Last accessed 19.09.2016.)